

Design

高等学校教材

设计数学

◎ 徐人平 主编



化学工业出版社
教材出版中心

工业设计专业规划教材



ISBN 7-5025-7253-8



9 787502 572532 >

第 一 批

产品模型制作
设计色彩学
产品设计原理
基础设计
工业设计概论 (中英双语)
设计形态语义学
设计符号学
网络化工业设计
设计图学
产品设计中的人机工程学
设计材料与加工工艺

谢大康
张宪荣 张莹
李亦文
谢大康 刘向东
黄毓瑜
陈慎任
张宪荣
黄毓瑜
李理
王继成
张锡

第 二 批

设计与法规
积累、选择、表达
——德国现代设计教育方法研究与实践
设计方法论
设计数学
设计管理——企业产品的识别设计
设计信息学
设计心理学
设计美学
设计的视觉语言
设计与视觉法则
设计表现技法
快速设计开发与快速成型技术
产品数字化设计技术与应用
工业设计创新的方法与案例
产品形象设计
标志设计
布言布语——服饰手工艺
西洋服装史图鉴

陈汗青 万仞
宗明明
李亦文
徐人平
花景勇
徐人平
任立生
张宪荣 张莹
薛红艳
张宪荣 张莹
林伟
徐人平
孙苏榕
高楠
宁绍强
李奋强
宗明明
范铁明

ISBN 7-5025-7253-8 定价: 39.80元

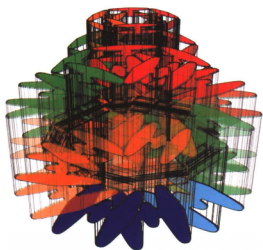


图6.38 分形的螺栓（李刚）



图7.39 奇异花（苟双晓）



图7.41 宝塔（苟双晓）



图7.42 包装盒（苟双晓）

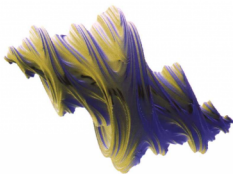


图9.16 三维奇异吸引子（李刚）

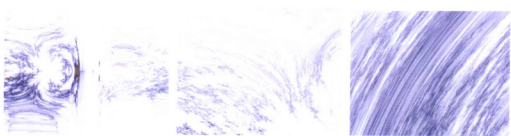


图9.24 一张分形图(李刚)

图9.25 分形瀑布(李刚)

图9.26 分形地层(李刚)

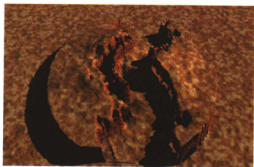


图9.31 分形山脉(李刚)

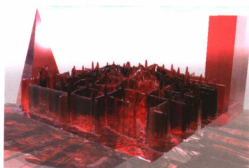


图9.35 虚拟的迷宫城市(李刚)

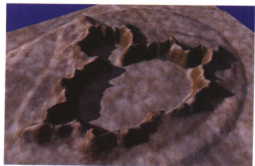


图9.36 曼德布罗特盆地(李刚)



图9.42 分形立体构成(李刚)

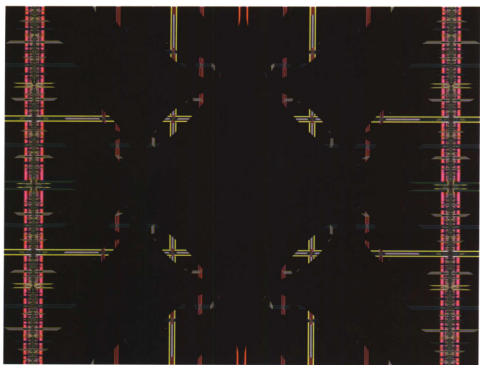


图9.43 平面构成(二)(李刚)

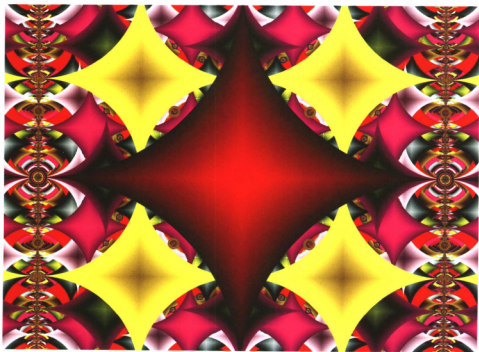


图9.44 平面构成(三)(李刚)

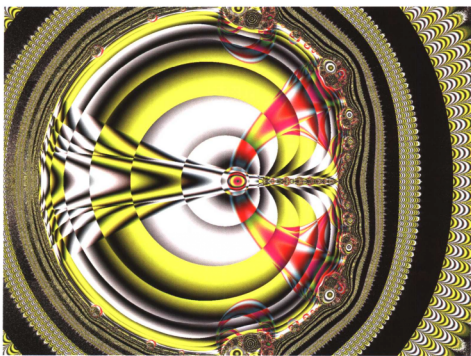


图9.45 呐喊 (李刚)

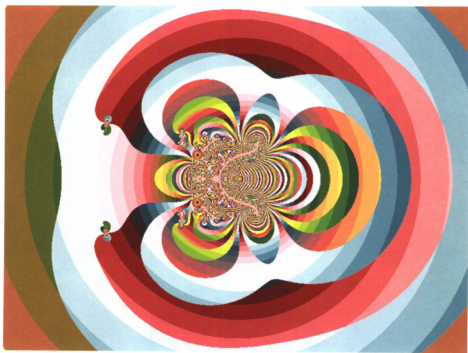


图9.46 彩蝶 (李刚)

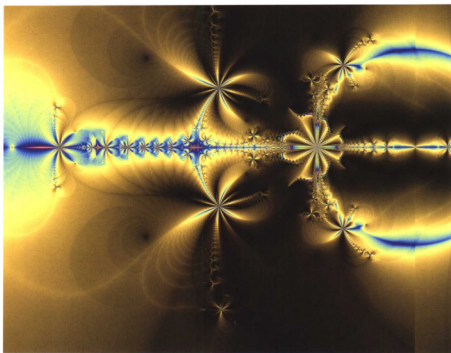


图9.47 “永结同心”全图

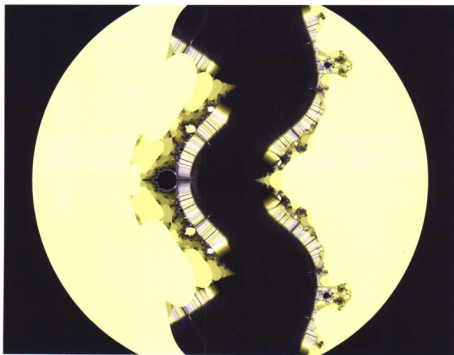


图9.48 蝙蝠

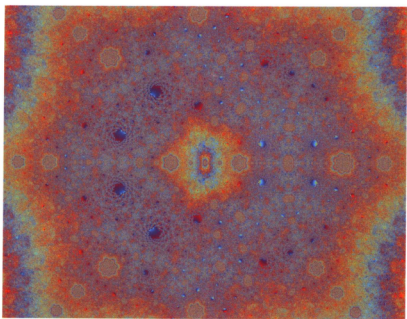


图9.49 行星上的赤铁矿

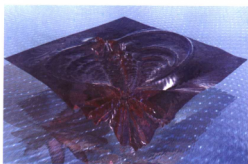


图9.50 立体“永结同心”

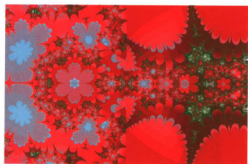


图9.51 群花之蕊

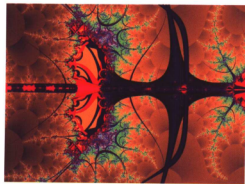


图9.52 分形之剑

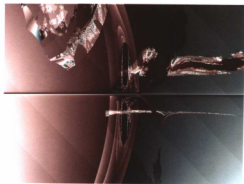


图9.53 喷射的星球

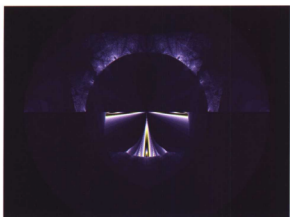


图9.54 表情

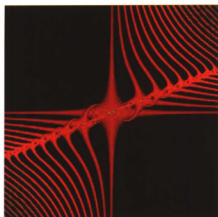


图9.55 鱼骨

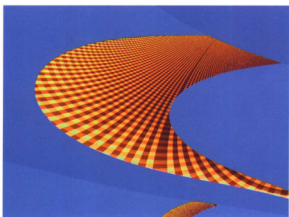


图9.56 魔毯

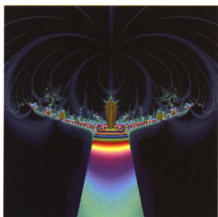


图9.57 殊途同归

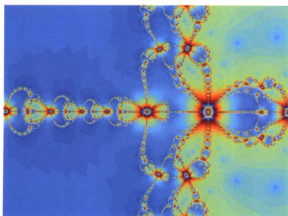


图9.58 项链

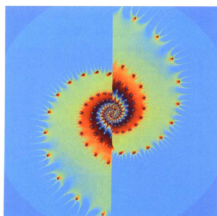


图9.59 贝壳

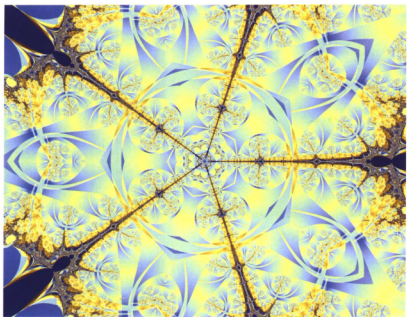


图9.60 “牛顿”花瓣

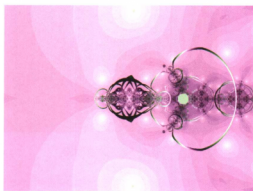


图9.61 葫芦

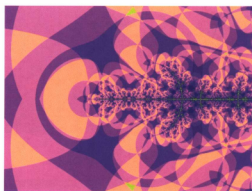


图9.62 色块的叠加

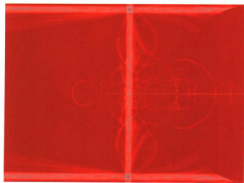


图9.63 十字军刀

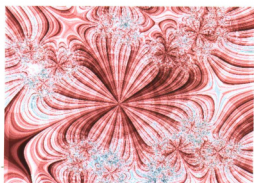


图9.64 花形本纹

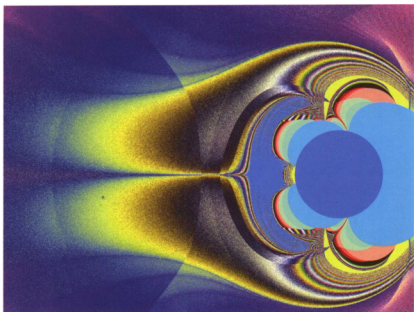


图9.65 星际旅行

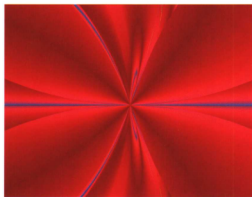


图9.66 红色火焰



图9.67 虚渺的星空

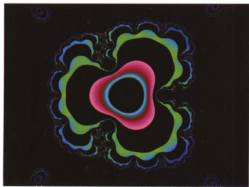


图9.68 蝴蝶花



图9.69 百合

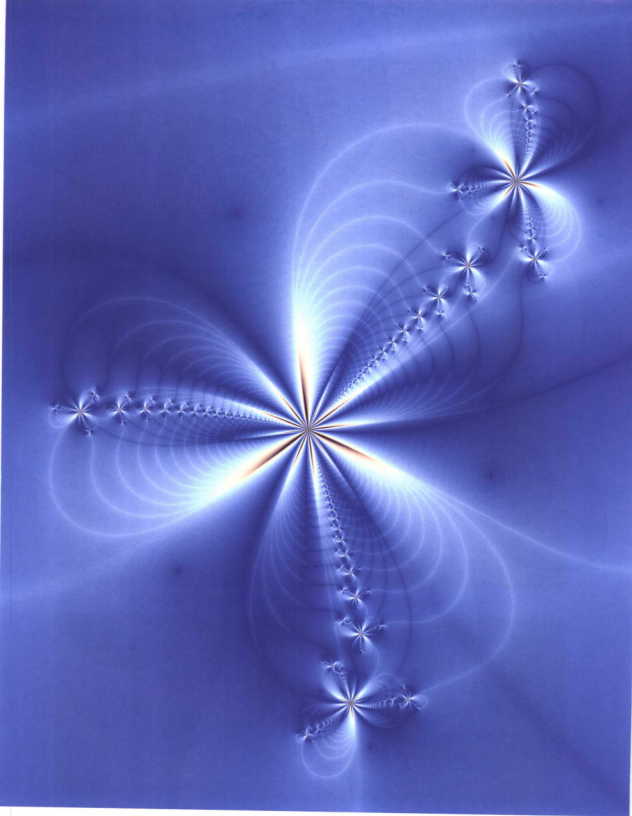


图9.70 永结同心（李刚）



图12.1 平面构成中的点

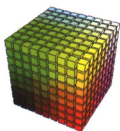


图12.44 色立体



图12.46 太极图

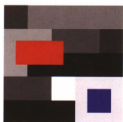


图12.47 无色系与
有色系对比配色

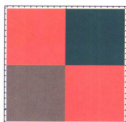


图12.48 双色系相对比



图12.49 最强度对比色相配色 (一)



图12.50 最强度对比色相配色 (二)



图12.51 次强度对比色相配色 (一)



图12.52 次强度对比色相配色 (二)

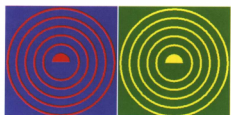


图12.53 中强度对比色相配色



图12.54 弱强度对比色相配色

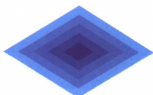


图12.55 明度对比混色练习



图12.56 高长调与低长调



图12.57 高短调与中间短调



图12.58 色彩纯度秩序的混色练习



图12.59 色彩纯度对比配色

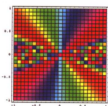


图12.60 点状色彩

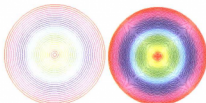


图12.61 线状色彩 (一)

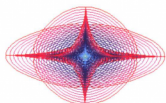


图12.62 线状色彩 (二)

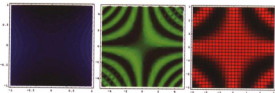


图12.63 面状色彩



图12.64 块状色彩



图12.65 不同色彩组合的心理反应

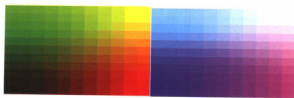


图12.67 色谱 (一)

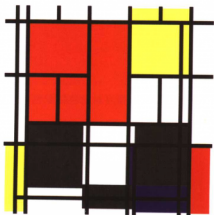


图12.66 仿蒙特里安色彩构图

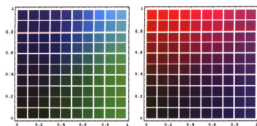


图12.68 色谱 (二)

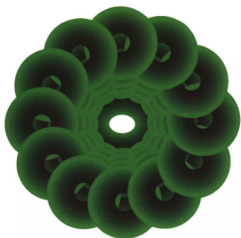


图12.69 圆的色彩构成 (杜娜)



图12.70 玫瑰形线组合图案纹样 (杜娜)

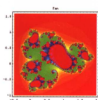


图13.6 Julia分形图案 (一)

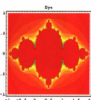


图13.7 Julia分形图案 (二)

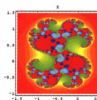


图13.8 Julia分形图案 (三)

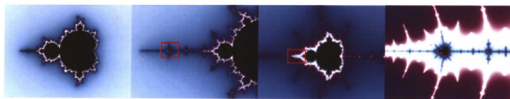


图13.12 The Mandelbrot set 的自相似

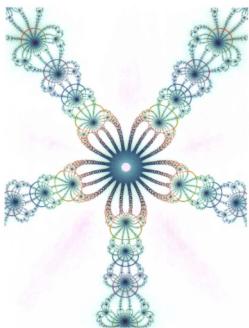


图13.26 牛顿之花 (李刚)

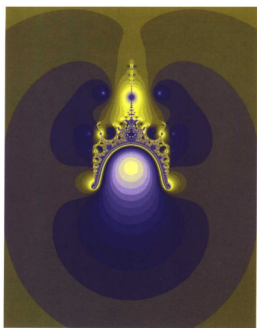


图13.27 狮子与皇冠 (李刚)



图13.34 水粉效果 (李响)

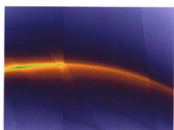


图13.35 GIF动画静帧及其分形原始图 (李刚)



图13.36 虚拟城市 (李刚)

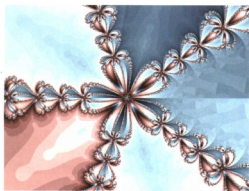


图13.37 分形图



图13.38 家装中的壁画(李刚)



图13.39 封面设计示例(李刚)



图13.40 理性公园(李刚)



图13.47 合成图(李响)



图13.51 彩霞曲(苟双晓)

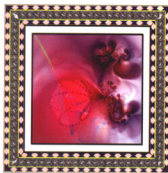


图13.57 挑灯看剑(苟双晓)

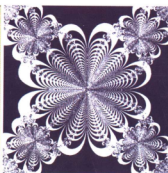


图13.58 分形花布图案单元

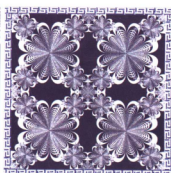


图13.59 分形花布(李响)

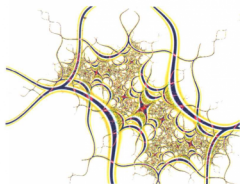


图13.60 线之舞(李响)



图13.61 生命的曲线(李响)



图13.62 无题——分形创作
(李响)



图13.63 绿色生命(李响)

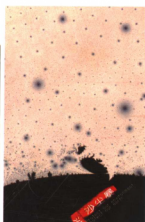


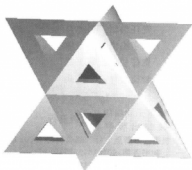
图13.64 公益海报设计
(李响)

高等学校教材

设计数学

徐人平 主 编

袁 涛 王坤茜 张安鸿 副主编



化学工业出版社
教材出版中心

· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

设计数学/徐人平主编. —北京: 化学工业出版社, 2005. 8

高等学校教材

ISBN 7-5025-7253-8

I. 设… II. 徐… III. ①数学-应用-工业设计-高等学校-教材②数学-应用-艺术-设计-高等学校-教材 IV. ①TB47②J06

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 098531 号

高等学校教材

设计数学

徐人平 主编

袁 涛 王坤茜 张安鸿 副主编

责任编辑: 张建茹

文字编辑: 闫 敏

责任校对: 郑 捷

封面设计: 于 兵

*

化学工业出版社 出版发行

教材出版中心

(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)

购书咨询: (010) 64982530

(010) 64918013

购书传真: (010) 64982630

[http:// www.cip.com.cn](http://www.cip.com.cn)

*

新华书店北京发行所经销

北京永鑫印刷有限责任公司印刷

三河市前程装订厂装订

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 20¼ 彩插 8 字数 488 千字

2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-7253-8

定 价: 39.80 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

前言

“数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学”(恩格斯《反杜林论》)。整个数学是以“数”和“形”两个基本概念作为主干,围绕着这两个基本概念的提炼、深化、演变而发展起来的。但是“数”和“形”二者并不是截然分开、互相割裂的。复杂的几何图形可以用简单的代数式表达,不同的几何特征之间具有内在的代数关系,因此在近代数学中将千变万化的空间形式的研究归结为比较成熟、也容易驾驭的数量关系的研究的方法原则一直被广泛使用,将其应用于工业设计和艺术设计中出现了新的分支——设计数学,拓宽了数学的应用领域,同时促使设计师对“数”和“形”概念的认识进一步深化,加强对设计本质的理解,并为设计师提供了强有力的武器,帮助设计师摆脱设计表达的烦琐事务,集中精力于创意和构思,进行更富创造性的设计活动。

设计数学在工业设计和艺术设计中随处可见:透视、比例、均衡、尺度、韵律、节奏、黄金分割、视觉平衡与协调。设计数学不仅解释了自然界和艺术作品中的美,也提出了在设计中创造美的理论与方法:对于一个未来设计师来说,要了解精美图形背后所蕴涵的深奥科学哲理和简单的运算规则,要理解看似冷冰冰的、枯燥的数学与富有情感的美实质上是在内相通的,更重要的是要学习应用这些知识和技术,在实际设计中创造美。

阿尔布雷希特·丢勒在《关于字母应有的造型》中强调:“没有什么东西比一张毫无技巧、笨拙的图片更让健康的判断力所讨厌了,尽管花费了许多心思和努力。这类画家没有认识到他们自身错误的惟一原因就是:他们没有学过几何学。没有几何学的知识,任何人都不可可能是或者成为一名纯粹的艺术家的,但是应该谴责他们的老师,他们自己对这种艺术是无知的。”经常可以看到一些极好的设计概念在设计实施过程中没有得到很好的表现,甚至被扭曲破坏。从设计信息传递的角度来看,设计图纸没有正确地传递设计师头脑中的设计理念,而是制造了噪声,浪费了资源,增添了烦恼,从而使人厌恶。其主要原因就在于这些设计人员没有掌握设计数学的基本原理,这些原理包括应用传统的比例进行构图和分割,包括抓住透视学的关键,即“消失点”的存在以及借助数学分析的方法去解决复杂的设计形态问题,用简单的数学公式去创造精美的造型等。

设计数学是一个受过高等教育的设计师应具备的基本数学修养和重要基础理论。数学并不是由一串串的计算公式和一系列定理堆砌而成的,数学的精华在于它的思想、精神和解决问题的方法,这种精华给予人类文化演进和认识客观世界以极其巨大的影响。数学在为设计师和艺术家提供创造和传达设计思想的灵感和工具方面起着积极的作用,设计师和艺术家利用设计数学遁入高维空间和复杂世界。著名数学家波利亚有一句名言:“数学就是解决问题的艺术”。学习设计数学的主要任务是学习设计工作中所需要的数学基本知识和基础理论,掌握设计中常用的数学方法,进行应用数学工具开展设计实践的基本训练,逐步培养抽象思维能力、逻辑推理能力、几何直观能力、空间想像能力和解决实际设计问题的能力,并为学习后续课程和开展实际设计奠定必要的数学基础。学习设计数学不仅要体验、理解和应用数学美,领会“视觉感受的数学关系”,培养“数学方式的理性思维”,

学习理性设计艺术,而且要掌握数学抽象化、符号化、公理化、模型化和最优化的思考方式,创造出符合美学标准,并具有欣赏价值的优秀设计作品。

现在提供给设计师(或未来设计师)的这本《设计数学》由三部分组成。

第一部分“初等设计数学”包括“比例、数列与构图”、“立体几何与立体构成中的多面体”、“设计透视与透视阴影”和“排列、组合、集合及其设计运用”四章。初等数学是常量的数学。《达·芬奇论绘画》指出:“美感完全建立在各部分之间的比例关系之上。”运用黄金律的数理比例关系来对画面进行分割构图,实际上就是在画面组织结构上再现秩序和数量在比例上的和谐,是一种以数据为依据来研究描述具象世界的几何学,从而导致历史上规则化的简洁的直线美风靡一时。康定斯基《论艺术的精神》中指出:“任何事物都可以用数学公式或一个简单的数来表示。今天,在探索抽象关系的过程当中,数的作用尤为突出。”将透视画法系统化的阿尔巴蒂在《绘画》中指出,做一个合格的画家首先要精通几何学。透视原理使视觉体验建立在一个稳定的基础上,使相互参照实现了精密化和系统化。设计几何学尤其是设计透视学的知识使设计人员能准确地预现设计意图。初等设计数学的知识将提高设计人员设计构图的能力并加强其科学性,从而达到视觉上的合理性、逻辑性和鲜明性。

第二部分“高等设计数学”包括“函数与函数图形”、“微积分及其应用”、“级数、傅里叶级数与节奏”、“矩阵与图形变换”和“分形与分形艺术”五章。高等数学是变量的数学,对象是变量及其函数,空间形式是用函数方程表示的曲线曲面。数学分析始于微积分的建立,并衍生出级数、傅里叶级数等,在此基础上发展起来的分形理论可以用来研究传统几何学不能描述的复杂的几何图形,揭示出复杂的表象背后,存在着简单的规则,简单规则的反复迭代构成了纷繁的世界。在表现手法上设计师可以借助计算机功能,通过分形迭代展现出绚丽多彩的可视化图像,形象地表达出复杂事物的千姿百态、绚丽多姿:弯弯曲曲的海岸线,起伏不平的山脉,粗糙不堪的断面,变幻无常的浮云,九曲回肠的河流,纵横交错的血管和眼花缭乱的满天繁星,在表现风格上比欧几里德几何更加科学,更接近自然,更贴近人的感情。

第三部分“设计数学实验”包括“设计数学实验概述”“函数、微积分和级数的图形实验”、“设计构成实验”和“分形艺术实验”四章。数学实验是设计数学的重要组成部分。设计人员在了解数学实验目的、要求、意义和实验环境的基础上,应用常用数学软件和设计软件对函数图形、微积分图形、级数展开图形、平面构成图形、立体构成图形、色彩构成和分形艺术图形进行数学模型求解。设计人员通过“作图形”、“搞设计”来“学数学”,自己动手计算、实验、验证、探索、求解,得到所需的设计图形,一方面可以深入理解设计数学中的基本概念和基本理论,增强对设计数学的认识和兴趣,激发进一步学好设计数学的愿望,促进设计数学教学的良性循环;另一方面可以培养理性设计思维,训练设计表达能力,明确解决问题的思路,掌握解决设计问题的方法,从而能够得心应手地应用数学理论,开展设计活动。

全书的写作特点是在介绍设计中常用的数学基本原理和基本知识的基础上,重点强调其在工业设计和艺术设计中的应用。

根据设计和教学需要,本书配备有相应的案例,展示了丰富多彩的理性空间构图,为了方便学习和理解数学知识,掌握解决设计问题的方法,本书特别加强了数学实验的内容,以提高设计人员动手能力和应用能力。

本书是工业设计专业高等学校教材。本书由徐人平任主编,袁涛、王坤茜、张安鸿任副主编。其中前言、绪论、各部分的引言以及各章的引言和小结由徐人平编写,第一章由

袁涛编写，第二章由袁涛、王坤茜编写，第三章由陈磊编写，第四章由袁涛编写，第五章由袁涛、王坤茜、李响编写，第六章由苟双晓、李响、杜娜、葛茂忠编写，第七章由王坤茜、李响、杜娜、陈本权编写，第八章由王坤茜、袁涛、李彦艳编写，第九章由李刚编写，第十章由李响、李刚、苟双晓、陈本权、张安鸿编写，第十一章由苟双晓、李响编写，第十二章由李彦艳、杜娜、苟双晓、李响、张安鸿编写，第十三章由李刚、李响、苟双晓编写，全书由徐人平、王坤茜、张安鸿统稿。

限于水平和时间关系，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者于云南昆明

2005 年 5 月

目 录

绪论	1
----------	---

第一部分 初等设计数学

第1章 比例、数列与构图	10
1.1 比例与数列	10
1.2 比例与数列在设计构图中的应用	14
1.3 分割在设计构图中的应用	23
1.4 小结	29
第2章 立体几何与立体构成中的多面体	30
2.1 立体几何与多面体	30
2.2 柏拉图多面体与阿基米德多面体	37
2.3 多面体的繁衍、变异	47
2.4 小结	56
第3章 设计透视与透视阴影	57
3.1 透视	57
3.2 透视图	61
3.3 透视阴影	68
3.4 小结	72
第4章 排列、组合、集合及其设计运用	74
4.1 排列、组合与集合	74
4.2 形态的各种组合与集合	78
4.3 形态在骨格中的组合与排列	80
4.4 小结	85

第二部分 高等设计数学

第5章 函数与函数图形	88
-------------------	----

5.1	函数	88
5.2	函数图形	92
5.3	函数图形应用	113
5.4	小结	121
第6章 微积分及其应用		122
6.1	导数及其应用	122
6.2	微分、微分方程及其图形特征	129
6.3	积分及其应用	137
6.4	小结	145
第7章 级数、傅里叶级数与节奏		146
7.1	级数基本概念	146
7.2	幂级数	148
7.3	傅里叶级数	151
7.4	小结	167
第8章 矩阵与图形变换		168
8.1	矩阵基础知识	168
8.2	图形变换	172
8.3	图形变换在设计中的应用	188
8.4	小结	192
第9章 分形与分形艺术		193
9.1	分形	193
9.2	分形艺术	205
9.3	新的造型语言——分形元设计	210
9.4	小结	214

第三部分 设计数学实验

第10章 设计数学实验概述		216
10.1	实验环境与实验步骤	216
10.2	基本数学软件	218
10.3	相关设计软件	231
10.4	小结	235

第 11 章 函数、微积分和级数的图形实验	237
11.1 函数图形实验	237
实验 1 一元函数图形	237
实验 2 空间曲线图形	241
实验 3 空间曲面图形	242
实验 4 立体曲面图形	244
11.2 微积分图形实验	245
实验 5 常微分方程求解图形	245
实验 6 常微分方程通解与特解关系图形	246
实验 7 全微分方程求解图形	248
实验 8 积分定义图形	248
实验 9 积分参数变化图形	249
11.3 级数图形实验	249
实验 10 幂级数展开图形	250
实验 11 傅里叶级数展开图形一	251
实验 12 傅里叶级数展开图形二	253
实验 13 傅里叶级数展开图形扩展	255
11.4 小结	256
 第 12 章 设计构成实验	 258
12.1 平面构成实验	258
实验 1 平面构成三要素	259
实验 2 平面重复构成	260
实验 3 平面渐变构成	262
实验 4 平面发射构成	264
实验 5 平面特异构成	265
12.2 立体构成实验	267
实验 6 基本形与自然形	267
实验 7 立体构成的统一和变化	269
实验 8 点元素立体构成	269
实验 9 线元素立体构成	271
实验 10 面元素立体构成	272
实验 11 块元素立体构成	275
12.3 色彩构成实验	278
实验 12 色彩系统	278
实验 13 色相对比	279
实验 14 明度对比	283
实验 15 纯度对比	284

实验 16 色彩表达	285
实验 17 色彩心理	288
实验 18 色彩应用	289
12.4 小结	291
第 13 章 分形艺术实验	292
13.1 分形图形生成方法实验	292
实验 1 Koch 曲线构造方法	292
实验 2 Sierpinski 三角构造方法	294
实验 3 Julia 分形画法	296
13.2 分形的自相似特性实验	298
实验 4 在 Ultra Fractal 中的分形自相似	299
实验 5 在 Fractint 中的分形自相似	301
实验 6 在 Iterations 中的分形自相似	301
13.3 分形艺术综合实验	302
实验 7 分形艺术实验	302
实验 8 分形色彩的艺术化	307
实验 9 分形图形艺术复合实验	309
实验 10 图形合成技巧	311
实验 11 图形的合成与制作	314
13.4 小结	318
参考文献	319

绪 论

一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。

卡尔·马克思

近百年来，数学发展突飞猛进，数学应用日益广泛，用“宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁无处不用数学”（华罗庚语）来概括数学的广泛应用一点也不过分。随着科学技术和社会经济的不断发展，各个领域对数学的要求越来越多、越来越高。工业设计和艺术设计作为设计学科的重要组成部分，在向高层次的发展过程中不可避免地要对其重要理论基础——设计数学提出需求。

美的基础是数

什么是美？

美是心借物的形象来表现情趣，是合规律性与合目的性的统一（朱光潜语），美又是自由的形式；完好、和谐、鲜明、规律性与目的性的统一，这就是美的本质和根源（李泽厚语）。

认识美、探索美是一个极为古老的课题。历史上关于美的评论相当多，流传千年的语录表达了人类当年的审美观，古老文明留下的痕迹打上了古代先人世界观的烙印。

苏格拉底认为：最有益的即是最美的。

亚里士多德认为：数学促进了人们对美的特征即数值、比例、秩序等的认识。

黑格尔在哲学史稿中说：“美包含在体积和秩序中。”

古希腊有一句打动人心的名言：“哪里为数，哪里就有关”。古希腊的美学是知识不可分割的一部分。当时的美学家、数学家毕达哥拉斯认为：万物皆数。其学派的基本观点就是“美的基础是数”。美的原则是：对称、和谐、比例。数或数量关系是万物的基本属性，事物之所以千差万别就在于它们各有不同的数量关系，并进一步提出在一切立体图形中最美的是球形，在一切平面图形中最美的是圆形。

人人都在日常生活中自觉地追求“美”，也都在实际操作中朦胧地遵循“数”的原则（这里的“数”是广义的、泛指，既包含数学的“数”，也包含秩序、节奏的“数”；既指物质的“数”，也指精神的“数”；既有可视的“数”，也有看不见的“数”。）

人类在造物中除去物质和实用方面要遵循数的原则外，在造型艺术方面也同样追求数——均衡和谐。任何物体的结构都是各种线段的组合，不管科学发展到何种程度，其形式美的法则不会变，只是更多样化与复杂化而已。

“美的基础是数”的立论考虑到了数的两个方面：

一方面是大自然本身存在的数，例如，物体的形状、比例、量变到质变的过程等。这种数是客观存在的规律；

另一方面是可操纵、可应用的数，主要是自然科学中的数和造型艺术中的数。人类可以在大自然客观规律的启示下用数的原则——和谐、比例、对称、均衡、节奏、韵律、对应和协调去创造物质财富与精神财富。

数是自然、客观存在的。审美主体的人用自己的智慧去认识它、利用它，按照它的规律、特征去塑造万事万物，并利用数的表现进行造型，发展艺术，设计产品，去创造美。也就是说，把数物化为人类的情感形式。而美可以理解为审美主体的人对数的情感物化，是数与情感的结晶。

综观历史，可以发现长期以来人们早就意识到设计中数与美的这种关系。

公元前三千年古埃及和古巴比伦的艺术大师和建筑工匠们制造出那些严循几何原理的金字塔和神殿就说明艺术设计中实际存在并遵循着严谨数学均衡原则。

古希腊美学家毕达哥拉斯及其学派从数学的角度来看待世界。认为美是由一定数量关系而构成的和谐，雕塑、建筑都是如此，如果是美的，必然体现了一定数量比例关系的和谐。

中国古代绘画理论认为，一幅画中，如果山高一丈，树则为一尺，马为一寸，人为一分，即 $100:10:1:0.1$ 。这就是常说的“丈山、尺树、寸马、分人。”这个比例表现了中国古代绘画中数的观点。

在中世纪，几何学中等边三角形、等腰三角形、正方形、五边形及其派生出来的八边形和十二边形形成了美学和艺术设计的基础。中世纪的许多教堂和著名建筑都设计成正方形或三角形的结构。

创作名画“蒙娜丽莎”的达·芬奇在《绘画论》中认为：人体比例标准，头为身高的 $1/7$ ，肩宽为身高的 $1/4$ ，跪下时减少 $1/4$ ，卧时减少 $1/10$ ，耳朵与鼻子长度应相等。达·芬奇对绘画比例作出如此精确的研究与描述，给人们的启迪仍然是数是绘画的依据。

包豪斯时期出现了一批“追数族”的艺术家，将黄金律数理关系推广应用到建筑、绘画和产品设计。近年来分形已在艺术和设计所涉及的各个领域（图案与装饰艺术、立体与雕塑艺术、动画与电影艺术、抽象绘画艺术、写实主义艺术和合成艺术）得到广泛的应用，并预示着一个新的审美思潮的来临。

正是由于数学的发展，才可能使绘画主体更自由地表现自我，因此鲁道夫·阿恩海姆在《视觉思维》中指出：“自由艺术之所以被称为‘自由的’，因为它们是那些掌握了数学语言的自由人应用的艺术。”

因此，正如美国的阿瑞提所说：“在几何图式艺术里，形象成为一种抽象，一种思想，生动性变为秩序，具体化为形式、对称、和谐。”

设计中的数学美与设计的数学化

美是人类创造性实践活动的产物，是人类文明的产物。一般地说，美是人类直觉的感性形式，是人类本质力量的感性表现，通常所说的美包括自然美、社会美和艺术美，前者是第一性美，后两者是第二性美。

数学作为科学的基础和生产的工具，本身具有许多美的特性：形象、生动而具体（这些有别于其他科学）。数学的简洁性、和谐性、抽象性、精确性、奇异性等诸多方面均展现出数学自身的美——对这些逐步理解、深入品味，可以改变往日对数学的偏见：枯燥、干瘪和乏味。

亚里士多德曾说：“虽然数学没有明显地提到善和美，但善和美不能与数学完全分离，因为美的主要形式就是秩序、匀称和确定性，这些正是数学所研究的原则。”

维纳进一步指出：“数学实质上是艺术的一种”。

认真分析这些意见,从美学和数学角度进行总结,可以说数学美是数学科学的本质力量的感性与理性的显现,是一种人的本质力量通过人的数学思维的呈现,是一种真实的美,是反映客观世界并能能动地改造客观世界的科学美。数学美既有第一性美的特征,更具有第二性美的特征。数学美不仅有表现的形式美,而且有内容美与严谨美;不仅有具体的公式、定理美,而且有结构美和整体美;不仅有语言精巧美,而且有方法美与思路美;不仅有逻辑抽象美,而且有创造美与应用美。

作为科学的数学,具有一般艺术共有的美的特点,而且在与设计结合后在其内容与方法上更表现出独特的艺术美。

设计中的数学美有着四方面的表现形式:对称、和谐;抽象、简洁;精确、统一;奇异、突变。

(1) 对称、和谐

对称、和谐是设计中数学美的基本内容,优秀的设计给人以圆满而匀称的美感与享受,其实质是数学中对立统一概念的具体应用与造型体现。常见的圆、椭圆、心脏线及各类几何变换群都具有鲜明的对称性,是数学形式美的表现,直观上给人以美的享受。

和谐包含着对称,是一种内容美,是按一定规律联系、匀称的,有一定秩序以及明确的变化规律,波浪滚滚的正弦曲线、欲达不能的渐近线、翩翩起舞的蝴蝶定理,在和谐中动静结合,富有诗情。

设计中对称、和谐美的典型例子就是黄金律及其应用。黄金律以其在数学上强大的逻辑性构筑了一条通向美的大路,在情感上是一种不偏激也不软弱,不蛮横也不低俗的形态,是一种典雅、端庄、温和而又高贵的美。黄金律“无限分割、均为等值”的节律既体现了自相似性又包含了哲理性,并依靠具体的形式要素,以数量之比来展示自身的“形式美”。同时,形式美又必须借助黄金律来实现自己形式结构的美学价值。美术作品的高雅风格,著名建筑的韵律节奏,工业产品的优美造型,视觉愉悦、黄金分割,均交融于数学的对称美、和谐美之中。

(2) 抽象、简洁

抽象、简洁既是设计中数学美的显著特点,又反映了数学的内在美。数学表达本身就是最抽象、简洁的信息传递,表达了复杂的精神理念,同时反映客观规律又极其深刻。许多复杂的几何图形和客观现象(例如山峦、云团和星系)都显现出一定的规律,抽象为十分简单的公式。

抽象、简洁还表现为利用符号认知新事物,研究新问题,从而使客观世界秩序化,并应用于设计。符号简化了复杂的艺术形式,并且把似乎不相关的现象巧妙地联系起来。符号的重要性在于其有无限的力量来协助直觉,把人、社会和自然中的数学关系联系起来去解决新问题,去创造新的思维形式,最终使用“精密”的方法去研究艺术,导致了“设计符号学”和“艺术符号学”的诞生,这无论对技术美学,还是对设计学都是一个重要组成部分。

数学是人类思维最美的程序,也是设计表达最准确的语言,没有任何学科的语言可以与其媲美,也没有任何方法比其更抽象、简洁。利用丰富、抽象的符号系统,时而迂回曲折,时而高歌猛进,时而陷入低谷,时而奇峰突起,让人视通万里、神游四海、沉醉于神奇的设计作品中。

(3) 精确、统一

精确、统一是设计中数学美的重要特征,表现为设计作品源于自然又高于自然,透视原理只有一个视点并作为第一要素,设计师从一个静止点出发,把三维空间以适当的比例精确地安排在图纸上,使二维画面成为通向三维空间的窗口,使视觉体验建立在一个统一的稳定基础上,在混沌中建立了秩序,相互参照实现了精密化、系统化,准确地表达了设计师的意图或精确地再现自然界的事物。欧几里德的几何体系被称为“壮丽”的结构。数学表达多样,但又统一于少数几个公式和定理之中。平面几何中的相交弦定理、割线定理、切线定理都统一于圆幂定理之中。椭圆、双曲线、抛物线统一于极坐标的一个公式之中。其定义的准确性、推理的逻辑严格性和结论的确定无疑与无可争辩性长期被赞美着,并为千百万设计师大量应用,向设计目标和科学堡垒进军。

秩序、适合、均衡、协调都包含着“精确、统一”的构图规律,实际上也是一切表现技法的根本法则。构图、色彩、线条、明暗的法则,都是从“精确、统一”这一基本法则出发,又是对称、均衡、比率等原理的基础。

(4) 奇异、突变

奇异、突变是设计中数学美的具体表现,反映了现实世界中非常规现象的一个侧面,也是数学发现和设计灵感的重要因素之一。数学中的奇异美,包含有一点“出乎意料”和“令人震惊”的意味,这种奇异美与统一美之间是一种对立统一的关系,把这两个相对立的方面结合起来,将在新的层次上达到更高的统一。

奇异、突变中蕴涵着美妙与魅力,奇异、突变中也隐含着道理和规律,培根说过“没有一个极美的东西不是在匀称中有着某种奇特”,“美在于奇特,而令人惊异”。混沌、分叉、跳跃、分形、奇异产生了丰富多彩且奇妙优美的图形,天空中漂浮的变幻莫测的云彩,地球表面的雄浑壮阔的地貌,海洋上风起云涌的滔天巨浪以及各种犬牙交错的边界线,这是传统手法难以描绘的,也是人类梦寐以求希望实现的;漂亮而又复杂的图形仅用一些简单公式就自动生成。

数学与设计还有更特殊、更密切的关系,即设计数学化的问题。这是当前发展的一种趋势。达·芬奇说过:“……人类的任何研究,如果不遵循数学阐述和证明的道路,就不能称作科学”。工业设计和艺术设计也遵循数学阐述的道路,可以用数学语言来描述,也可以用数学工具来创造美。客观世界的任何一种物质形态及其运动形式都具有空间形式和数量关系。这就导致了数学和它的方法可以普遍地运用于任何一门科学,设计也不例外。当然一门学科的发展只有达到一定阶段,科学的抽象深入到一定的程度,才可以具备运用数学的条件,现象越复杂,其参数也就越复杂,对其进行准确的量的分析也就越困难,但是随着科学本身的进步,任何现象在量的方面将越来越多地被阐明,运用数学的可能性就越来越大,对于工业设计和艺术设计也是如此。美学家李泽厚先生早就说过:“审美……结构……具体形式将来可以用某些数学方程和数学结构来作出精确的表述”。

美感是有待发现和解答的某种未知的数学方程式。这方程式的变数很多,不同比例的配合可以变成不同种类的美感。

寻找审美心理的数学方程式是使美学进入科学王国的重要途径,同时也为数学自身的美找到用途和依据,并使其得到充分发挥。

科学认识的一般规律是这样:开始对事物进行定性研究,然后再研究其量的规律性,

精确的定量研究使人们能够深入地认识事物的本质。因此任何一门科学只有在充分地运用数学的时候,才算是达到真正完善的地步。现代科学的发展已经进入这样一个阶段:普遍处于数学化的过程中,设计学也是如此,计算机的深入发展和广泛应用为处理设计资料,研究其数量关系和开展艺术设计提供了物质平台,更加速了这种数学化的趋势。设计的数学化不仅大大提高了设计的质量和效率,而且是实现手段现代化、设计虚拟化,增强实用性的重要途径。当然设计的数学化也向数学研究提出了新的任务,大大扩充现在应用的数学工具,要求建立和发展解决设计问题的设计数学分支,“设计数学”也就是在这种情况下适应社会发展的需要而诞生的。

设计的数学化及其应用问题,人们正在探索中,并已产生了一些全新的设计方法,例如近年来新出现的生成设计和生成艺术、设计基因和信息遗传等新理论、新技术、新方法。而设计数学正是这种探索的基础和准备。

设计师需要设计数学教育

在当今知识经济时代,对工业设计和艺术设计的研究已进入到一个更深的高级层次和更广的应用范畴,在这些研究中,数学的应用往往是实质性的,数学与设计的关系从来没有像今天这样密切。许多一度被认为没有应用价值的抽象数学概念和枯燥数学理论,出人意料地在设计实践中找到了它们的原型和应用。随着设计的科学化、规范化、数字化、虚拟化、智能化和集成化,人们已经逐渐认识到一个好的数学家不一定非要掌握设计知识,但一个优秀的设计师必须学习数学,具备一定的数学修养。因为在设计实践中对于构图原理、设计透视、人体比例、立体构成以及画面的黄金分割等典型的艺术设计问题,常常要涉及到对重要数学概念的理解和相关数学原理的应用。因此康定斯基认为:“数学是一切抽象表现的终结,对绘画应进行数学分析和处理,从而使绘画艺术从感性认识上升到理性认识阶段,从一般性技能上升到一门科学或准科学的地位。”非常明显,一个设计师对于几何、代数、三角函数、级数甚至分形混沌等数学知识掌握得越多、理解得越深刻,对于艺术设计的理解力、洞察力和解释力也就越强。因此达·芬奇早在其《艺术专论》中就作出结论:“欣赏我的作品的人没有一个不是数学家”。

马克思早就说过:“在美术科学中,至今还有一个领域被忽略了,这就是关于比例的理论……”。马克思逝世一百多年来,美术、工业设计和艺术设计已经大大地向前发展了,但设计数学的理论研究和实践探索却仍然很不够,在设计教育领域,设计人员在设计数学方面的基本教育和基础训练仍然十分缺乏。

设计数学训练能够使设计人员的设计思想的表达和设计创新的推理,更加合理、简捷、严谨和清晰。这些对于一个设计专业的大学生,一个正在成长中的高级设计师来说,更显示其重要性。

进入 21 世纪,知识和信息大爆炸,产品周期越来越短,技术更新越来越快,正在向设计师提出严峻的挑战。对未来设计师应变能力与思维素质的培养,被提到首要的地位,大学生在校几年的学习只是终身教育的一个重要基础台阶,应该在校园环境的陶冶下,在教师的帮助下,通过合适的知识载体不断地学习、吸取和掌握新知识,提高设计和创新能力。设计数学对于设计师来说正是这样一个重要的不可缺少的载体。

设计数学是社会进步的产物,也是推动工业设计和艺术设计发展的动力。数学一直与人类文明、人类文化、美学素质有密切的关系。在工业设计和艺术设计的文化方面,设计

数学也一直在其基础层面和理解层面上发挥着重要作用。

设计数学不仅是一种重要的“工具”或“方法”，也是一种思维模式，即“数学方式的理性思维”；设计数学不仅是一门科学，也是一种文化，即“数学文化”；设计数学不仅是一门知识，也是一种素质，即“数学素质”，数学训练在提高设计师的推理能力、抽象能力、分析能力和创造能力上，是其他训练难以替代的。

数学素质是设计师文化素质和设计基础的一个重要方面，懂数学是有文化的象征，是懂设计的标志。没有一定数学底蕴的人是难以搞好设计的。数学的思想、精神、方法，从数学的角度看问题的切入点，处理问题的条理性，思考问题的严密性，对设计师综合素质的提高都有不可或缺的作用。较高的数学修养，不论对于“艺术”还是对于“设计”都是十分有益的，“胸中有数”中的“数”，不仅包含事物的数量方面，也包含数学的思想、精神、方法等方面。所以设计数学教育是提高设计师基本素质的重要环节。

马克斯·比尔进一步指出：“我的观点是，创造一种基于数学思维的艺术是可能的”。数学的简洁性、抽象性、和谐性和奇异性展现了数学自身的美。同时启迪设计师去思维，去探索，去研究，去发掘，在自己的设计中去创造美。数学的抽象性帮助设计师抓住事物的共性和本质，数学的严密性确保设计结果逻辑上的可靠性，数学也是思维的体操，进行数学训练本身就是锻炼思维的智力操，可以增强思维本领，提高抽象能力、逻辑推理能力和辩证思维能力，最终提高设计能力，设计数学教育培养设计师以简驭繁，审同辨异，善于析理和提高美学鉴赏力四大本领。

随着知识经济时代和信息社会的到来，数学更是“无处不在、无所不用”，尤其在设计工具的数字化、网络化，研究对象的数量化、模型化的今天，数学基础更加重要。加之计算机的广泛普及和深入应用，显然对设计师提出了严峻的挑战和现实的启示：每一个想成为有较高文化修养和设计基础的现代设计师都应具备较高的数学素质。设计数学教育对设计专业的大学生来说必不可少。

设计数学的性质、作用、任务和学习方法

设计数学是一个受过高等教育的设计师应该具备的基本数学修养和重要基础理论。

《设计数学》课程是设计专业的一门既有系统理论体系，又有很强实践特征的主要基础课程。实践表明，设计数学教育将从五个方面对工业设计和艺术设计专业的学生发挥作用。

- 掌握必要的数学工具，用来处理和解决设计中普遍存在的数量化问题和逻辑推理问题。
- 熟悉数学文化、加强数学底蕴、提高数学修养、具备数学素质，使未来的设计师终身受益。
- 培养“数学方式的理性思维”如抽象思维、逻辑思维，帮助设计师在今后长期的设计实践中潜移默化地用数学规律去创造文明（包括物质文明和精神文明）。
- 掌握透视造型艺术的视觉特征，领会视觉感受的数学关系，逐步熏陶高尚的审美情操。
- 为未来设计师的继续教育和终身学习打下扎实的基础、做好充分的准备。

因此进行设计数学教育对于设计专业学生的素质教育和专业教育是非常基础和非常重要的一个方面，是培养和造就一大批具有创新精神和创新能力的新型设计人才的必不可少

的措施。

学习设计数学的主要任务表现在五个方面：

- ① 学习设计数学的基本知识和必要的基础理论；
- ② 掌握设计中所需要的常用数学方法；
- ③ 完成应用数学工具开展设计实践的基本训练；
- ④ 培养抽象思维能力、逻辑推理能力、几何直观能力、空间想像能力、设计构思能力和应用数学方法解决实际设计问题的能力；
- ⑤ 为学习后继课程和开展实际设计工作奠定必要的数学基础。

分析《设计数学》，可以发现其显著特点是既重视数学理论又强调设计实践，因此学习设计数学应注意以下几点。

① 理论联系实际 设计数学来源于实践，但从实践中抽象出来以后，又有相对的独立性和稳定性。数学问题的表述形式有时让人觉得枯燥深奥并难以预测其应用前景，但数学理论可能联系的“实际”，有时又常常超出人们最初的设想，甚至是数学理论出现时尚未出现的“实际”。

因此学习设计数学，始终要以设计中使用的数学理论的学习及其应用贯穿始终，在学习设计数学的过程中，要紧紧紧抓住“图形”不放，理论联系实际，多想、多看、多画，不断地“由数画图，由图想数”，将现实世界的空间形式和数学理论的数量关系结合起来，反复熟悉其对应关系，逐步培养空间想像能力和抽象思维能力。

② 重视数学实验 实验训练在设计数学的学习中占有特别重要的地位，并在今后设计工作的实际应用中发挥着极其重要的作用。数学知识的理解，解决问题思路的明确，表达能力的训练和设计思维的培养，很大程度上依靠数学实验得到保证。因此设计数学中特别增加了数学实验的内容并强调其重要性。完成一定数量的上机实验和作业，是学习和巩固数学理论、培养设计构思能力和逻辑推理能力的基本保证。因此对数学实验和作业要高度重视，认真、按时、优质地完成。

③ 掌握解决设计问题的方法 学习设计数学，理解常用的数学理论并不难，运用数学公式画出设计图形，也比较容易，困难的是在具体设计过程中掌握解决设计问题的方法，应用设计数学去解决实际问题。因此理解设计数学的内涵，熟悉图形与公式之间的内在联系，掌握正确的设计步骤，努力培养分析问题和解决问题的能力是学习设计数学的关键，要求能够正确地应用设计数学理论开展设计活动，得心应手地创造出受人欢迎的优秀设计作品。

④ 注意个性化发展 设计数学本身仅仅是一种工具，但是，设计师能够借助设计数学摆脱传统工具和习惯的束缚，充分发挥潜能，主动发挥创造力和想像力，用非常简单的公式、非常简便的方法，设计出理想的作品。

设计数学的学习、研究和创新需要交流和讨论，需要团队精神和集体力量，但是与其他学科的学习有所不同的是，设计数学的学习和创新更多需要的是个人的钻研和勤奋的劳动，设计的关键在创意，不同情况下设计的对象不相同，设计的结果肯定不相同，因此设计的过程和手段也不相同，设计师应将主要精力集中于设计创新上，从而获得更多的创作灵感，进行更富有创造性的创作活动，实现真正的“个性化”设计和创作。

当年欧几里德几何学曾是康定斯基、蒙德里安等一代抽象艺术家的理想工具，那种规

则化的、简洁的直线美曾风靡一时，当时人们普遍认为包豪斯式的建筑风格最具有现代感（1921年康定斯基曾在包豪斯设计学校任教）。然而，正如一位诗人所说：“美在欧几里德的眼中是显然的，但完全和持续欣赏欧几里德的美却需要艰苦和长期的训练，甚至可能是一种特殊的天赋。”当今，设计数学作为现代设计师的一种理想工具，也是显然的。然而要学好设计数学，掌握好设计数学，不仅需要一定的设计基础，还要对设计数学有浓厚的兴趣，更多地要靠勤奋工作。有一定的数学天赋，刻苦钻研，进行个性化发展，才能在设计数学领域做出创造性成果，设计出符合美学标准，并且具有欣赏价值的优秀的作品。

第一部分 初等设计数学

马克思曾说：“在美术科学中，至今还有一个领域被忽略了，这就是关于比例的理论……”把数学和艺术联系起来，可能在一些人看来是天方夜谭，然而，事实上，数学与艺术是密切相关的。

艺术家丢勒认为：“通过数学方法，我们可以把原已存在的美找出来，从而可以更接近美这个目的。”人类主要是以数学思想来解释大自然，用数学概念来概括涉及一切现象的种种规律，表达那些发生在我们周围世界以及整个宇宙世界的事物的规律，包括用数学来设计世界，指导艺术。

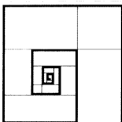
几千年来，人们习惯欧氏几何，崇拜欧氏几何。欧氏几何是人类知识的结晶，是人类的骄傲，欧氏几何把自然界的图形高度抽象，归纳为点、线、面等几何元素，进而构造出三角形、矩形、梯形、圆和椭圆等十分规则的几何图形，用它们又可以组成各种更为复杂的图形。基于欧氏几何的艺术创作，像埃及的三角形金字塔、古希腊运用黄金分割律的建筑与艺术造型，中世纪遵循几何原理的教堂和著名建筑，无不体现出欧氏几何那种整齐、明快的线条美。从达·芬奇到印象派，无论是设计师还是画家都遵循欧几里德空间观念和透视方法。

综观历史，可以看到无论是几何还是代数，数学都为设计师和艺术家提供了提高、完善和简化其研究工作的工具。多少世纪以来，设计师和艺术家以及他们的工作都由于了解和应用数学而得到极大的促进。时常可以听说艺术家利用数学概念来增加其作品的魅力。当然，理解设计，欣赏艺术也需要数学修养，达·芬奇的结论是：“欣赏我的作品的人没有一个不是数学家。”因此数学素质是设计师文化素质和设计基础的重要方面。

初等设计数学，无论是设计几何还是设计代数，对于设计专业的学生，都是设计的基础和学习的入门，是一个受过高等教育的设计师必须具备的基本数学修养和重要基础理论。

第1章

比例、数列与构图



- 比例与数列
- 比例与数列在设计构图中的应用
- 分割在设计构图中的应用
- 小结

“通过用单纯的形态与比例之间构成一种和谐、均衡的关系”，“美感完全建立在各部分之间神圣的比例关系之上”。在设计中，比例与数列的运用，主要通过分割的方法进行。有目的地使用比例或者数列，使得设计的元素有序变化，能够产生比例适当的节奏及韵律的视觉美感。

构图布局往往是决定设计作品成败的关键。因此设计师和艺术家总是综合造型的物理规律和直观形态的心理规律，科学地、明智地运用数理法则，寻找构图布局的美感和逻辑性，追求视觉上的合理性和鲜明性，达到一种艺术、科学与哲学相结合的新秩序，创造出丰富、完美的构图形式。比例和数列在设计构图中起着极其重要的作用，运用黄金律的数理比例关系对各种类型画面进行分割构图，可以从容不迫地、轻松地掌握大型画面和复杂画面的组织结构，摆脱对大型画面构图布局的窘困和失控的尴尬。

“美产生于度量和比例”，这一点在现代设计中非常重要。将形式美的视觉法则和黄金律的数理比例关系结合在一起，靠近比例、秩序及和谐的内核，使构图设计形式和方法更为丰富和便捷，更为完美和坚实。同时，可以从掌握诸多经验和规律，在构图天地里驰骋纵横而不乏理性。在黄金律的指导下能动地、卓有成效地寻求创造各种有机秩序的形式组合，创造完美的构图。

1.1 比例与数列

1.1.1 比例线段与相似形

在四条线段中，如果其中两条线段的比等于另外两条线段的比，那么，这四条线段叫做成比例线段，简称比例线段。

【例1】 图1.1中， $AB=40$ ， $BC=20$ ， $A'B'=20$ ， $B'C'=10$

解 因为 $\frac{AB}{BC} = \frac{40}{20} = 2$ ， $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{20}{10} = 2$

所以 $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$

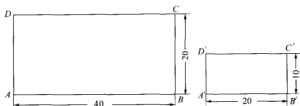


图 1.1 相似形

因此, AB 、 BC 、 $A'B'$ 、 $B'C'$ 是成比例线段。而且矩形 $ABCD$ 与矩形 $A'B'C'D'$ 是相似形。

两个矩形的对角线若是平行的, 或者是互相垂直的, 这两个矩形就是相似形。

1.1.2 比例的基本性质

设 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 则

$$ad=bc \quad (\text{外项积等于内项积}) \quad (1.1)$$

$$b:a=d:c \quad (\text{反比定理}) \quad (1.2)$$

$$a:c=b:d \text{ 或 } d:b=c:a \quad (\text{更比定理}) \quad (1.3)$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad (\text{合比定理}) \quad (1.4)$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad (\text{分比定理}) \quad (1.5)$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \quad (\text{合分比定理}) \quad (1.6)$$

设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, 则

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b} \quad (\text{等比定理}) \quad (1.7)$$

若 y 与 x 成正比 (或写为 $y \propto x$), 则

$$\frac{y}{x}=k \text{ 或 } y=kx \quad (\text{式中 } k \text{ 为比例常数, 下同}) \quad (1.8)$$

若 y 与 x 成反比 (或写成 $y \propto \frac{1}{x}$), 则

$$y:\frac{1}{x}=k \text{ 或 } xy=k \quad (1.9)$$

1.1.3 数列的定义

依照某种法则排列着的一系列数或者按照一定的规律所排列成的一群数 (数群), 称为数列。

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1.10)$$

其中 a_n 是数列的第 n 项。有时把上面的数列简记作 $\{a_n\}$ 。如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式来表示, 那么这个公式就叫做这个数列的通项公式。

数列可以用图形来表示。在画图时, 为方便起见, 在直角坐标系两条坐标轴上取的单

位长度可以不同。

项数有限的数列叫做有穷数列，项数无限的数列叫做无穷数列。

1.1.4 等差数列

1.1.4.1 等差数列的定义

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母 d 表示。

如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1 ，公差是 d ，那么根据等差数列的定义得到

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (1.11)$$

当 $n=1$ 时，上面等式两边均为 a_1 ，即等式也是成立的，这表明当 $n \in N$ (N 为自然数) 时上面公式都成立，因而它就是等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

等差数列的通项公式又可以表示为 $a_n = pn + q$ ，其中 p, q 是常数。当 $p \neq 0$ 时，它是关于 n 的一次式，因此从图形上看，表示这个数列的各点均在一次函数 $y = px + q$ 的图形上。例如，首项是 1，公差是 2 的无穷等差数列的通项公式为

$$a_n = 2n - 1 \quad (1.12)$$

相应的图形是直线 $y = 2x - 1$ 上的均匀排开的无穷多个孤立点，如图 1.2 所示。

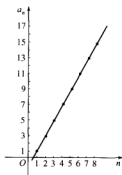


图 1.2 $y = 2x - 1$ 的图形

1.1.4.2 等差数列的前 n 项和

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，即

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (1.13)$$

根据等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，上式可以写成

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \quad (1.14)$$

再把项的次序反过来， S_n 又可以写成

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + [a_n - (n-1)d] \quad (1.15)$$

式 (1.14) 与式 (1.15) 相加，得等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (1.16)$$

这就是说，等差数列的前 n 项和等于首末项的和与项数乘积的一半。

式 (1.16) 又可以写成

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \quad (1.17)$$

1.1.5 等比数列

1.1.5.1 等比数列的定义

一般地, 如果一个数列从第2项起, 每一项与它的前一项的比等于同一个常数, 那么这个数列就叫做等比数列, 这个常数叫做等比数列的公比, 公比通常用字母 q 表示 ($q \neq 0$)。

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad (1.18)$$

其中, a_1 与 q 均不为 0。由于当 $n=1$ 时上面等式两边均为 a_1 , 即等式也成立, 说明上面公式当 $n \in N$ 时都成立, 因而它就是等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

例如, 数列 1, 2, 4, 8, \dots , 2^{63} 。首项是 1, 公比是 2, 它的通项公式是

$$a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1} (n \leqslant 64) \quad (1.19)$$

式 (1.19) 还可以写成

$$a_n = \frac{1}{2} \times 2^n \quad (1.20)$$

可见, 表示这个等比数列的各点都在函数 $y = \frac{1}{2} \times 2^x$ 的图形上, 如图 1.3 所示。

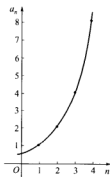


图 1.3 $y = \frac{1}{2} \times 2^x$ 的图形

如果在 a 与 b 中间插入一个数 G , 使 a, G, b 成等比数列, 那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项。

如果 G 是 a 与 b 的等比中项, 那么 $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$, 即

$$G^2 = ab \quad (1.21)$$

因此

$$G = \pm \sqrt{ab} \quad (1.22)$$

反过来, 如果 a, b 同号, G 等于 \sqrt{ab} 或 $-\sqrt{ab}$, 即 $G^2 = ab$, 那么 G 是 a, b 的等比中项。

例如, 4 与 -4 都是 2, 8 的等比中项。

容易看出, 一个等比数列从第2项起, 每一项 (有穷等比数列的末项除外) 都是它的前一项与后一项的等比中项。

1.1.5.2 等比数列的前 n 项和

一般地, 设有等比数列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

它的前 n 项和是

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (1.23)$$

根据等比数列的通项公式, 上式可写成

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \quad (1.24)$$

当 $q \neq 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad (1.25)$$

上面的公式还可以写成

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} \quad (1.26)$$

很明显, 当 $q=1$ 时, $S_n = na_1$ 。

当已知 a_1, q, n 时, 用式 (1.25); 当已知 a_1, q, a_n 时, 用式 (1.26)。

1.2 比例与数列在设计构图中的应用

前面学习了比例、数列的数学问题。而比例和数列在设计构图中的作用是极其重要的, 现在讨论它们在设计构图中的应用。

1.2.1 比例在设计构图中的应用

在设计中, 比例主要表现在两个方面。一是画面的长与宽的关系, 即构成一个什么样的长宽比例关系, 对于人的视觉来说, 这个长宽比例本身就会因选择的长宽比例之不同, 带来不同的心理感应; 二是指图形与底的比例大小关系, 即图形在整个构图中所占的分量, 这对整个构图的形式美起着举足轻重的作用。“美产生于度量和比例”, 这一点在现代艺术设计中也是非常重要的。造型设计是在单纯的形态与比例之间构成一种和谐、均衡的关系。

造型上所谓的比例是量 (长度、面积等) 的比率, 可通过比例关系, 建立各种比例矩形。例如, 一个矩形, 其长与宽的比值, 即是该矩形的比例。这时, 比值越大, 意味着该矩形越细长; 比值等于 1 时, 则该矩形为正方形。

1.2.1.1 黄金矩形

古希腊人崇尚比例和秩序, 特别对黄金比例。他们认为在含有黄金率的形状中, 具有和谐的比例和稳定的秩序美感。

黄金率一般用 ϕ 来表示。古希腊人已经知道黄金率的循环关系

$$1 : 1.618 = (1.618 - 1) : 1 \quad (1.27)$$

即

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618 \quad (1.28)$$

$$\phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618 \quad (1.29)$$

$$\phi^{-1} = \frac{1}{\phi} \quad (1.30)$$

由于公式中含有无理数 $\sqrt{5}$ ，通常对这一类含有无理数的矩形分割时，一般使用几何法进行，可得到精确的比例矩形。

(1) 黄金矩形的做法

① 先画一个正方形 $ABCD$ 。

② 在 AB 线上找到中点 E ，连接 EC 。以这条斜线为半径作一段圆弧，与 AB 的延长线相交于 F 点。过 F 点作 AB 的垂直线交于 DC 的延长线上 G 点，所构成的小矩形 $BCGF$ 和正方形 $ABCD$ 共同构成了一个黄金矩形 $ADGF$ (图 1.4)，且矩形 $BCGF$ 也是一个黄金矩形。

这个黄金矩形能够被进一步分割。当进一步分割后，该矩形产生一个较小比例的黄金矩形和一个正方形。这个分割过程可以无限继续下去，产生许多更小的黄金矩形和正方形 (图 1.5)。

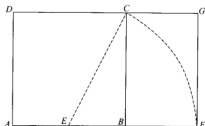


图 1.4 黄金矩形的画法

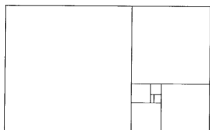


图 1.5 黄金矩形反复分割

(2) 黄金分割螺旋线的构成

连续分割黄金矩形后，可得到很多大小不同的正方形，以这种分割而成的正方形的边长为半径画弧，然后连接这些正方形的边所形成的弧线，就得到一条螺旋线，这条螺旋线又称为黄金螺旋线 (图 1.6)。

也可在这些正方形中，连接其对角线，成为直线型的螺旋线 (图 1.7)。

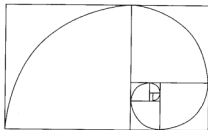


图 1.6 黄金螺旋线

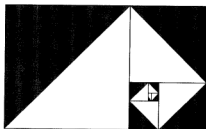


图 1.7 直线型的螺旋线

(3) 从正五边形构成五角星及黄金分割三角形

① 先作正五边形。

以外接圆求正五边形的方法：画两条垂直相交的直径线，求出半径 OD 的中心点 M ，以 M 点为圆心，以 MA 为半径作弧线交于 CD 线上的点为 E 。取 AE 的长度等于 AF ，即 $AE=AF$ ，这就是五边形的一条边。继以画出正五边形 (图 1.8)。

② 连接五边形的五个点，构成一个五角星。这个圆内接五角星具有非常优雅的比例，如图 1.9 所示，其中 $AB:BD$ 、 $AC:AD$ 或 $BC:CD$ 的比值都是黄金率。

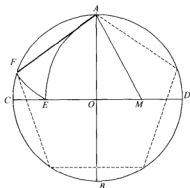


图 1.8 正五边形的画法

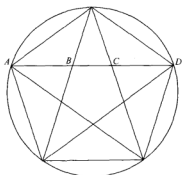


图 1.9 正五边形连接成的五角星

这个正五边形连接成的五角星，它是由三个黄金分割三角形构成的。把正五边形底边的两个顶点与对面顶点相连，就会得到一个底角为 72° ，顶角为 36° 的等腰三角形，即黄金分割三角形（图 1.10）。

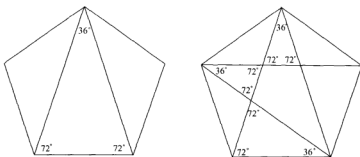


图 1.10 由黄金分割三角形构成的五角星

(4) 从正十边形构成黄金分割三角形（图 1.11）

同理，在正五边形的基础上，作成个正十边形。其任意两个相邻的顶点与中点相连便会产生这样一个黄金分割三角形。

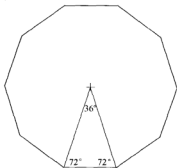


图 1.11 从正十边形构成黄金分割三角形

(5) 黄金矩形的各种动态分割

以相似的方法不断分割一个黄金矩形，会形成一系列具有相同比例的和谐图形。其过程非常简单，先画出黄金矩形的对角线，根据矩形对角线若相互平行或者垂直，两矩形是相似形的原理，利用这些由水平线和垂直线形成的网线，又形成子图形的边和对角线。如此反复，就得到了若干相似而大小不等的黄金矩形的各种动态分割。

利用黄金矩形的对角线进行分割，最后形成各种大小不等的相似形。如图 1.12 所示，图中的虚线和斜线是分割对角线，不同大小的矩形是分割后所形成的相似黄金矩形，它们又是由正方形加黄金矩形构成的。

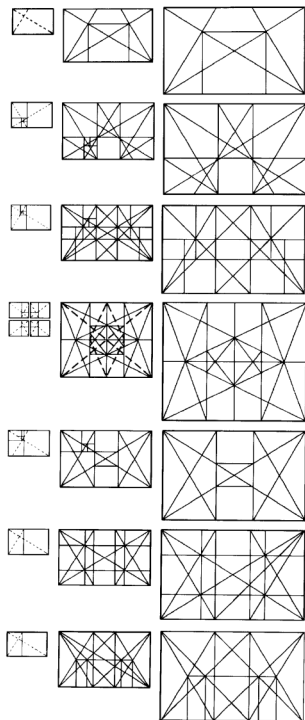


图 1.12 黄金矩形的各种动态分割

1.2.1.2 根号矩形与分割

(1) 根号矩形的画法

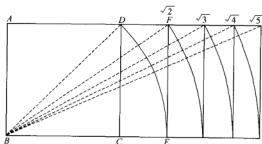
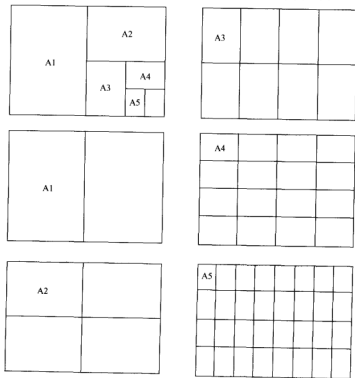
① 先画一个正方形 $ABCD$ 。② 连接对角线 BD 。以 BD 为半径作一段圆弧，与 BC 的延长线相交于 E 点。过 E 点作 BC 的垂直线与 AD 的延长线交于 F 点，矩形 $ABEF$ 构成了一个 $\sqrt{2}$ 矩形（图 1.13）。

图 1.13 根号矩形的画法

③ 连接矩形 $ABEF$ 的对角线 BF ，以 BF 为半径画弧……依次就画出了 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ 和 $\sqrt{5}$ 乃至 \sqrt{n} 等矩形（图 1.13）。(2) $\sqrt{2}$ 矩形的性质

$\sqrt{2}$ 矩形具有特殊的性质，能被无限分割成更小的等比矩形。这意味着当一个 $\sqrt{2}$ 矩形被二等分时，得到 2 个较小的 $\sqrt{2}$ 矩形；当被四等分时，得到 4 个较小的 $\sqrt{2}$ 矩形……正是因为这个原因， $\sqrt{2}$ 矩形是欧洲 DIN（德国工业标准）纸张尺寸体系的基础。将纸对折得到原来纸张的一半，若将这张纸折叠 4 次就得到 4 印张或者说是 8 印刷面等。这个标准体系不仅很简捷，而且最大限度利用纸张，没有任何浪费（图 1.14）。

图 1.14 $\sqrt{2}$ 矩形的等比分割

(3) 各种 $\sqrt{2}$ 矩形动态分割

与黄金矩形动态分割相似， $\sqrt{2}$ 矩形也可被动态分割，像黄金分割矩形一样，能产生大量分割与组合，这些图形总是符合原始矩形的比例（图 1.15）。

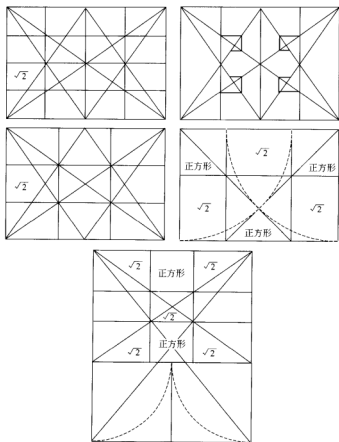
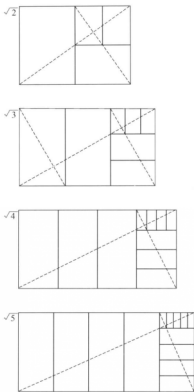
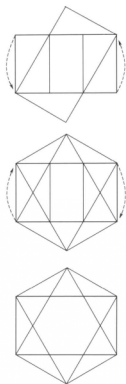


图 1.15 各种 $\sqrt{2}$ 矩形动态分割

人们常用的纸张、报刊、书籍，甚至于门、窗、床、盒子、办公桌面等大都是 $\sqrt{2}$ 矩形，总之， $\sqrt{2}$ 差不多包围着人们。在设计以及装饰中使用此形时基本上是用等分法，但在绘画构图上却宜采用富于变化的非对称分割法，目的是在统一和变化的矛盾中，寻求“既不单调又不混乱的某种紧张而调和的世界。”

(4) $\sqrt{3}$ 矩形与其他根号矩形

正如 $\sqrt{2}$ 矩形能被分割成相似的矩形， $\sqrt{3}$ 矩形、 $\sqrt{4}$ 矩形和 $\sqrt{5}$ 矩形也可以被这样分割。这些矩形既能被横向分割也能被纵向分割。 $\sqrt{3}$ 矩形能被分割为 3 个垂直的矩形；这 3 个垂直的矩形能被分割为 3 个水平的矩形。 $\sqrt{4}$ 矩形和 $\sqrt{5}$ 矩形同样如此（图 1.16）。

图 1.16 $\sqrt{2}$ 矩形、 $\sqrt{3}$ 矩形、 $\sqrt{4}$ 矩形和 $\sqrt{5}$ 矩形的相似分割图 1.17 $\sqrt{3}$ 矩形构成正六边形(5) $\sqrt{3}$ 矩形构成正六边形

一个正六边形可以由一个 $\sqrt{3}$ 矩形构成。以它的中心为轴旋转这个矩形使各顶角重合，就可以构成这个正六边形（图 1.17）。

这个正六边形能在雪花晶体的形状、蜂巢和自然界许多其他物质中找到（图 1.18）。

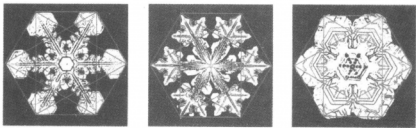


图 1.18 雪花晶体中的正六边形

(6) $\sqrt{5}$ 矩形

$\sqrt{5}$ 矩形可以是一个正方形加两个黄金矩形构成。所以它也是一个非常优美的矩形。具体画法在下一小节中介绍。

1.2.1.3 正方形分割

正方形是一种稳定的形状，具有庄重、稳定感，在正方形中进行分割，可以分割出丰富的各种矩形。

(1) 正方形中的黄金矩形分割

正方形中的黄金矩形分割见图 1.19。

(2) 正方形中的根号矩形分割

画正方形 $ABCD$ ，以 B 为圆心， AB 为半径画圆弧与对角线 BD 相交于 a ，过 a 点作平行于 BC 的线段 EF ，矩形 $BCFE$ 就是 $\sqrt{2}$ 矩形。同理，又作 $BCFE$ 的对角线 BF ，与圆弧交于 b ，作平行于 BC 的线段 GH ，那么 $BCHG$ 即是 $\sqrt{3}$ 矩形。依次作出 $\sqrt{4}$ 矩形 $BCJI$ 和 $\sqrt{5}$ 矩形 $BCML$ （图 1.20）。

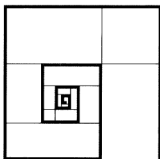


图 1.19 正方形中的黄金矩形分割

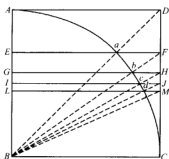
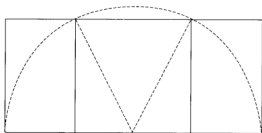


图 1.20 正方形中的根号矩形分割

(3) 由正方形构成 $\sqrt{5}$ 矩形的方法

另一种构成 $\sqrt{5}$ 矩形的方法是从一个正方形开始，以这个正方形底边的中点为圆心，由此中心到对面顶点的距离为半径画一条弧线，与正方形底边延长线相交（图 1.21）。

图 1.21 由正方形构成 $\sqrt{5}$ 矩形

正方形两侧的小矩形都是黄金矩形，2 个小矩形中的一个与中间的正方形组成一个黄金矩形。2 个黄金矩形和这个正方形共同构成一个 $\sqrt{5}$ 矩形。

1.2.2 数列在设计构图中的应用

在设计中，比例所讨论的问题，主要是具有长度、宽度（即面积）的形的两个数量间的比值关系。至于处理三个或以上的多种比值时，就必须进行数列的研究。以一定的法则所产生的数群均属数列，它们对造型都极有用处。但是，若计算和作图不能方便简单的

话, 则在实际运用中就不好使用。所以, 这里提供以下几种在设计中具有代表性的数列, 通过相互比较, 来探讨各种数列的特征和构成的图形。

① 等差数列

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, \dots, a_1+(n-1)d \quad (1.31)$$

等差数列, 在坐标轴上, 其形态是一条直线, 倾斜的角度随数列的公差的大小变化。在造型上, 其跳动的特点较为平缓。

② 等比数列

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1} \quad (1.32)$$

等比数列, 在坐标轴上呈一条曲线, 在造型上, 其跳动幅度就比等差数列大得多。

③ 调和数列

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n \quad (1.33)$$

调和数列是分数, 如果在设计中觉得使用不方便的话, 可以作这样的处理: 先把分数换算成小数, 便是: 1, 0.5, 0.33, 0.25, 0.2, 0.17, 0.14, 0.13, 0.11, 0.1, ... 然后把这个顺序颠倒后, 各数扩大 10 倍, 得到一个数列: 1, 1.1, 1.3, 1.4, 1.7, 2, 2.5, 3.3, 5, 10。这样一来, 就比较便于使用了。

调和数列在坐标轴上的形态呈双曲线状。在造型上, 若按整理成分数的数列形式, 其跳动的幅度也较为平缓, 若与公差为 1 的等差数列相比时, 其跳动的幅度也较小些。

上述三个数列一般都会在数学中学习。下面要介绍在设计中经常用到的重要数列。

④ 费波纳齐数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

其通项公式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (1.34)$$

为了在设计中能够方便地运用, 可把费波纳齐数列写成

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, P, Q, (P+Q), \dots \quad (1.35)$$

即后项等于前两项之和。

费波纳齐数列在造型的意义上, 是一个很重要的数列。这个数列有一个特点, 邻接二项的比值近似黄金率。即当数列的数值较大时, 后项与前项的比值接近黄金率 1.618。如: $21/13=1.6154$, $34/21=1.619$, $55/34=1.6176$, $89/55=1.6182$, $144/89=1.61798$, ... 可以看到, 选择的相邻两项数值越大, 比值越接近黄金率 1.618。

费波纳齐数列在造型上, 其跳动的幅度, 在等差数列与等比数列之间。

⑤ 佩尔数列

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots, P, Q, (P+2Q) \quad (1.36)$$

同样, 为了在设计中能够方便使用, 其通项公式, 可简单地表示成 $P+2Q$, 即后项等于前项乘 2 再加前项。

细心观察佩尔数列时, 也会发现, 在数列中, 当数值较大时, 邻近的二项的比值近似于 2.414, 即近似等于 $1+\sqrt{2}$ 。如:

$$29/12=2.4167, 70/29=2.4138, 169/70=2.4143, \dots$$

佩尔数列其跳动的幅度大, 变化激烈, 在造型上是一个强有力的数列。

图 1.22 和图 1.23 所示是用线段的间隔宽窄和它们在坐标轴上的变化的图示来表示数列跳动的幅度。

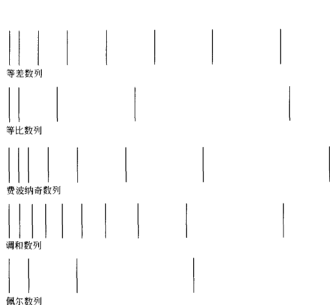


图 1.22 数列跳动的幅度

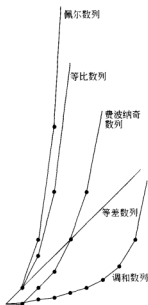


图 1.23 用坐标轴图示的数列变化

1.3 分割在设计构图中的应用

1.3.1 分割的概念

比例是指一事物整体与局部及其局部与局部之间的量度比率关系。秩序，则是部分与整体的内在联系。比例、秩序是形成设计的严整性、和谐性和完美性的重要因素。分割构成，一般可以理解为利用比例、秩序等方法有目的地切割画面，形成富于节奏感的构图。分割是设计中的最重要设计手段之一。在绘画艺术中，画面的分割，能够突出表现的主题和形象；在产品设计中，很多功能的实现和形式的区别，都是靠分割来完成的。而且可通过数列来进行分割，能造成比例适当、排列有序的视觉美感形式。

分割有规律性分割和自由分割。前者构图整齐、严谨，使画面充满了秩序和节奏；后者可使用曲线和直线来进行自由的分割，画面具有流畅性和自由的变化。在这里，主要讨论规律性分割。而自由分割也必须遵循必要的“规则”，才能在所谓的“自由”中体现出美感。这里不讨论自由分割。

分割的形态，既可以是几何性的，也可以是具象性的。前者简洁而单纯；后者富有变化和情趣。从造型的角度上讲，具象的分割更具想像力。

在规律性分割中，主要有等分割和渐变分割两类。

(1) 等分割

等分割有两种形式。

① 等形分割 分割而成的形与形完全相同，形成了整齐规范的构图（图 1.24）。

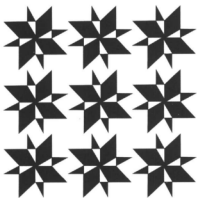


图 1.24 等形分割 (周林)

② 等量分割 几何形等量分割而成的形,其形状有所不同,但面积一定完全相等。如一个正方形,把它一分为四,可有不同的方法形成不同的形状。虽然这些形状彼此不同,但面积则完全相同。用这种方法进行分割,就可构成等量分割的构图(图 1.25)。

等形分割后的形态完全相同,故造型严谨。若造型过分简单,就会缺乏变化;而等量分割,由于形状互异,面积相等,所以在视觉效果上,既富于变化,又在量感上予以均衡感和安定感,如图 1.26 和图 1.27 所示。

(2) 渐变分割

渐变分割是利用数列等方法,对分割线的粗细和间隔的宽窄,按照某一规律依次增大或减小,形成一个级数构图的分割。因为是有规律性的,故在变化中具有统一性。这是一种具有动力感和统一性的分割构成。级数变化的大小,在视觉效果上,呈现不同的感觉。变化率大的,呈加速度量变,颇具快感(图 1.28~图 1.32)。

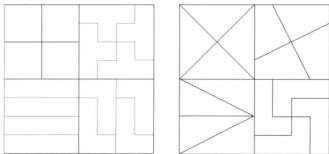


图 1.25 等量分割

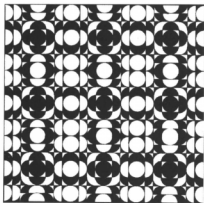


图 1.26 等量分割构图 (一)(汤洋)



图 1.27 等量分割构图 (二)(汤洋)

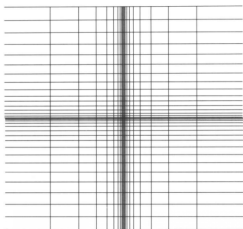


图 1.28 等差与费波纳齐数列的分割

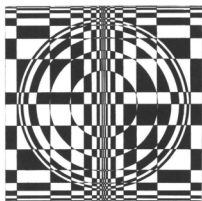


图 1.29 费波纳齐数列分割 (樊志勇)

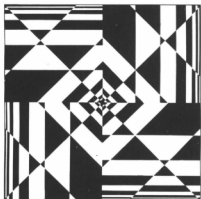


图 1.30 费波纳齐数列分割 (周林)

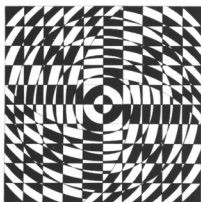


图 1.32 分割构图 (樊志勇)

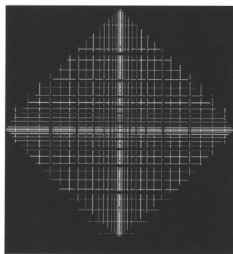


图 1.31 等差数列分割

1.3.2 图形构图分割

(1) 黄金比例

为什么人类会偏爱 $1:1.618$ 这样的比例呢？19 世纪后期德国的一位心理学家古斯塔夫·费希纳（Gustav Fechner），研究了人们对于黄金分割矩形具有的特殊美学属性所产生的心理反应。费希纳将他的实验限定于人造物中，并测量了数以千计的各种矩形物体（如书、盒子、建筑物、火柴纸夹、报纸等）。他发现大部分人喜爱边长比例接近于黄金分割率（ $1:1.618$ ）的矩形。随后，1908 年拉洛（Lalo）使用了一种更科学的方法重复了费希纳详尽做过的但并不系统的实验，其后又有其他人重复了这个实验，这些实验的结果都非常相似。

可见，主要的因素是由于黄金比例存在于人类的生长方式和形体中，对黄金比例的偏爱是一种与生俱来的本能。当看到与这种比例相关的事物时，就会激活这种与生俱来的本能的喜爱，从而产生出愉悦和快感。

黄金比例不仅存在于人类的形体中，也存在于动植物的成长方式中。贝类的螺旋轮廓线显示成长过程的积淀方式，它已经成为许多科学研究与艺术研究的课题。贝类的这些成长方式是以各种黄金分割比例形成的对数螺旋线，它们被认为是一种完美成长的方式。其成长的螺旋线并不是精确的黄金分割比例，确切地说，在其生物成长方式的比例中存在一种趋势，努力接近黄金比例。

在绘画中，黄金矩形一直就被认为是最美的长方形，其短边与长边的比例为 $1:1.618$ 。通常被称为 M 型矩形。由于黄金矩形有较大的长宽比，便于表现广阔的空间，所以也被称为“海景型”画面。

人体的形体比例与许多动植物一样，具有黄金分割率。人类对于各种黄金分割比例偏好的另一个原因，也许就是人的面部和身体同样具有在众多生物中所发现的这个数学比例关系。

古希腊人崇尚比例与秩序。据记载，最早关于人体与建筑比例的研究，是古希腊学者及建筑家维特鲁威（Marcus Vitruvius Pollio）[●] 的著述。维特鲁威建议，神殿这类建筑物应该采用与完美的人体比例相似的比例构成方式，因为人体各部分十分和谐。维特鲁威认为完美的比例应是：人体的身高与伸展开的手臂的长度是相等的，人体的高度与伸展开的手臂的长度形成了一个正方形将人体围住，而手和脚正好落在以肚脐为圆心的圆周上。在此体系中，人体在腹股沟处被等分为两个部分，肚脐则位于黄金分割点上。

① 古希腊雕塑的黄金分割比例 分析古希腊雕塑家多里弗罗斯（Doryphoros）的《持矛者》和来自月神庙海角（Cape Artemision）的《宙斯》这两尊雕像，它们均来自于公元前 5 世纪。虽然是由不同的雕塑家创作的，但《持矛者》和《宙斯》的比例都是以维特鲁威原理为基础的，分析两者比例使用的方法也几乎是一样的。

如图 1.33 所示的持矛者雕塑（左）和宙斯雕塑（右），带有虚斜线的矩形描绘出了每一个黄金分割矩形。两个人物比例几乎一样。

● 维特鲁威，生卒年月不详。公元前 1 世纪古罗马帝国恺撒·奥古斯都御用建筑师和军事工程师。他所写的《建筑十书》，于公元前 27 年问世，成为欧洲中世纪以前遗留下来的惟一的建筑学专著，也是全世界遗留至今的第一部最完备的建筑著作。书中明确提出了“坚固、实用、美观”的建筑三原则。这部建筑名著，对欧洲的文艺复兴建筑和古典主义产生了较大的影响。2000 年来，虽然建筑科学有了很大的发展和创新，但维特鲁威所建立的建筑学体系，从总的方面来说仍然有着重要的参考价值。

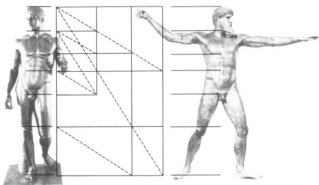


图 1.33 古希腊雕塑的黄金分割比例

图 1.34 诠释了维特鲁威的比例理论。

② 达·芬奇在绘画中的人体比例 文艺复兴时期的艺术家达·芬奇 (Leonardo da Vinci) 在绘画中同样运用了维特鲁威原理。

人体由一个正方形包围着,手和脚落在以肚脐为圆心的圆周上。腹股沟将人体等分为两部分,肚脐在黄金分割点上(图 1.35)。

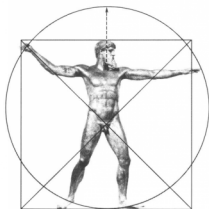


图 1.34 雕塑符合维特鲁威的理论

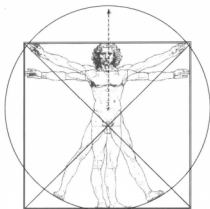


图 1.35 绘画中运用了维特鲁威理论

艺术家们所表现的,尤其是古希腊人对各种黄金分割比例的运用,是系统化和理想化表现人体的一种尝试。在现实中,人类和其他生物一样,很难完美地达到具有黄金分割的面部及身体比例,但是在努力地接近这个比例。

现代的艺术家们同样用黄金比例分析人体和人的面部比例,发现所谓的俊男、靓女们的面部五官的大小比例一般都接近黄金率。这也为现代的整容和化妆等设计提供了理论和技术支持。

③ M 型画面中可能的分割形式(图 1.36) 黄金矩形其短边与长边的比例为 $1 : 1.618$,通常被称为 M 型矩形。M 型具有延伸感,横着使用的 M 型使人有安静、自由、深沉和冷漠的感觉。

(2) F 型画面

F 矩形是由两个黄金矩形组成的, 是一种便于分割和运用的画面型, 为当今世界各国美术界广为推崇。当两个黄金矩形结合成一个矩形时, 这时矩形的长宽比为 $1.236:1$ (即长边为 2, 短边为 1.618), 把它称为 F 矩形。如用数学公式来表示, 为

$$F = \frac{2}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = 1.236 \quad (1.37)$$

“欧洲油画内框的标准尺寸”中的人物型就是以它来进行缩放的, 是画家们最喜欢使用的画面型。这种画面看上去有一种朴素、安定、自由的动感, 它的短边与长边的比为 $1:1.236$, 比较接近正方形, 很适合于表现人物画创作, 是一种非常容易掌握的画面型。这种画面型同时也适合表现静物、风景和广告设计等 (图 1.37)。

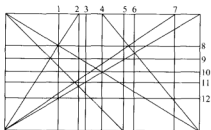


图 1.36 M 型画面的分割形式

1—左为 $\sqrt{5}$ 长方形; 2—右为正方形, 左为 ϕ 长方形;
3—分成 $1:\sqrt{2}$ 的比例; 4—右左为 2 等分 ($F+F$);
5—左为正方形, 右为 ϕ 长方形; 6—右为 $1/3$; 7—左
为 $\sqrt{2}$ 长方形; 8—下为 $\sqrt{5}$ 长方形; 9—下为 ϕ 长方形 +
S 正方形; 10—上下为 2 等分; 11—分成 $\sqrt{2}:1$ 的比
例; 12—上为 $\sqrt{5}$ 长方形

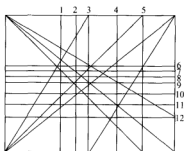


图 1.37 F 型画面的分割形式

1—左为 $1/3$; 2—左右为 $1:\sqrt{2}$; 3— $1/2$ 线,
形成 $\phi+\phi$; 4—左为逆数 F 型, 右为 $\sqrt{5}$ 长方形;
5—左为正方形; 6—上为 $\phi+\phi$, 下为 $\sqrt{4}$ 长方形;
7—上下为 $1:\sqrt{2}$; 8—上为 $\sqrt{4}+\sqrt{5}$ 长方形;
9—为 $1/2$ 线, 上下同成为 $F+F$ 长方形; 10—
上为 $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$, 下为 $S+S+S$; 11—上为 $2/3$,
下为 $1/3$; 12—上为 ϕ 长方形

(3) P 型画面

$\sqrt{2}$ 矩形, 又被称为 P 型矩形。在绘画中这种画面非常适合于画风景。所以被称为“风景型”的画面。 $\sqrt{2}$ 矩形的特点前面已经叙述过: 无论对开还是四开, 或六开、八开等, 都得出它的相似形。

P 型画面看上去具有安定、稳健、自由、活泼、平和的感觉, 运用范围十分广泛 (图 1.38)。

(4) S 型画面及分割

正方形又被称为 S 型矩形。它具有坚实的庄严感, 从形态上看它是一个朴素、严谨的静态型, 尽管它的高与宽相等, 但在感觉上则是高比宽略大一些的矩形。它不仅适合于各类画种: 如油画、国画、版画等的创作和写生, 同时也适合于工艺设计与运用。它是一种比较容易分割的画面型, 它和圆具有一些相同性质。如把它那种稳定的形运用到画面上, 就会产生一种稳定的空间。一旦将正方形纳入画面, 必然会留下细长的长方形面积, 这和

构图中的正方形同样具有重要意义。即：产生了同正方形这个稳定形体——静的要素相呼应的动的要素（图 1.39）。

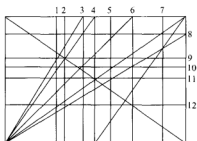


图 1.38 P型画面的分割形式

1—右为正方形；2—左为 $1/3$ ；3—左为 ϕ 长方形；
4—左右为 $1/2$ ；5—左为 $\sqrt{2} + \sqrt{4}$ 长方形；6—左为正方形；7—左为 F 长方形；8—下为 ϕ 长方形；
9—下为 $2/3$ ；10—下为 $S + \sqrt{2}$ 长方形；11—上下为 $1/2$ ；12—上为 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 长方形

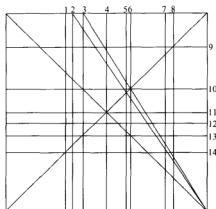


图 1.39 S型画面的分割形式

1—右为 $\sqrt{2}$ 长方形；2—左为 $1/3$ ；3—右为 ϕ 长方形；
4— $1/2$ 线，左为 $\sqrt{4}$ 长方形；5—左右为 $3:2$ ；6—左为 ϕ 长方形；7—右为 $1/5$ ；8—左为 F 长方形；9—下为 F 长方形；10—下为 ϕ 长方形；11— $1/2$ 线，上下为 $\sqrt{4}$ 长方形；12—下为 $\sqrt{5}$ 长方形；13—上为 ϕ 长方形；14—上为 $\sqrt{2}$ 长方形

这一节中，重点对画面的分割进行了讨论。但要注意，画面的分割，应有统一的分割比例，不能任意地、随心所欲地分割。如果那样的话，分割后的画面是杂乱无章的、无序的拼凑，很难体现出和谐的美感来。

1.4 小结

① 两个比相等叫做比例，在设计和构图中指整体与局部以及局部与局部之间的量度比率关系。

② 以一定法则产生的一系列顺序排列、依次变化的数群均属数列。设计中常用的数列有等差数列、等比数列、调和数列、费波纳奇数列和佩尔数列。

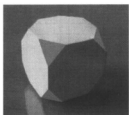
③ 分割对于画面具有很大的影响，起到骨架的作用。分割一般可以理解为利用比例、数列等方法有目的地切割画面，从而形成富于节奏感的设计。

④ 黄金律属于形式美中“比例与和谐”的范畴、运用黄金律的数理比例关系来进行构图布局，将使画面组织更为协调统一。

⑤ 无论是 M 型画面、F 型画面，还是 P 型画面、S 型画面，都应有统一的分割比例才能体现出和谐的美。

第2章

立体几何与立体构成中的多面体



- 立体几何与多面体
- 柏拉图多面体与阿基米德多面体
- 多面体的繁衍、变异
- 小结

立体几何是欧几里德几何的一个分支,立体几何的研究对象是空间图形,在解决实际问题时,仅仅了解黄金分割法和数列的知识,能够运用比例进行构图,是远远不够的,宏伟的建筑,精致的产品,美好的创意,奇特的造型,都需要具备空间图形的知识。

立体几何是三维空间几何,对客观实体的空间性质作了深刻的阐明,是研究空间立体造型的立体构成的基础。以立体几何为基础的立体构成是在三维空间进行实际占据空间的造型活动,所表现的是真实的立体效果,而不像平面构成所表现的立体感是在二维平面上所表现出的立体幻想。三维实体形态众多,但在设计中应用最多的是多面体,其中,无论是柏拉图多面体,还是阿基米德多面体,都有着十分简练精致的外形。具有规则美的特点,通过切割、凹凸、边缘等处理可以进行多面体之间丰富的转化和造型,熟悉立体几何与立体构成中的多面体,可以增强空间立体观念,进一步理解空间立体造型的基本规律,并从中得到启迪,诱发联想,扩大思维范围,从而提高创作构思能力。

2.1 立体几何与多面体

2.1.1 直线与平面

(1) 平面的基本性质

- ① 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内。
- ② 如果两个平面有一个公共点,那么它们必相交于过这点的一条公共直线。

(2) 平面的确定

- ① 过不在同一条直线上的三点。
- ② 过一条直线和直线外一点。
- ③ 过两条相交直线。
- ④ 过两条平行直线。

(3) 有关直线、平面位置关系的性质定理

- ① 夹在两平行平面间的平行线段的长相等。

- ② 两平行平面间距离处处相等。
- ③ 两直线如果被三个平行平面所截，则所截得的对应线段成比例。
- ④ 如果两个角的两边分别平行且方向相同，这两个角必相等。
- ⑤ 从平面外一点向平面引垂线和斜线，若斜线长相等，其投影长也相等；斜线较长的，投影长也较长。反之，若投影长相等，斜线长也相等；投影长较长的，斜线长也较长。

(4) 关于多面角的定理

- ① 多面角的所有面角之和小于 360° 。
- ② 三面角的任何一个面角小于其他两个面角之和；三面角的任何一个面角大于其他两个面角之差。
- ③ 平面角相等的二面角相等；相等二面角的平面角相等。

2.1.2 多面体

(1) 棱柱

棱柱的分类见表 2.1。

表 2.1 棱柱的分类

名称	定义	主要性质				
		侧棱	侧面	底面	直截面	对角面
棱柱	有两个面互相平行，其余每相邻两个面的交线互相平行的多面体	互相平行且相等，但不一定等于高	都是平行四边形	全等的多边形	是全等的多边形，但不一定与底面相等	平行四边形
直棱柱	侧棱与底面垂直的棱柱	互相平行且都等于高	都是矩形	全等的多边形	与底面平行且相等	矩形
正棱柱	底面是正多边形的直棱柱	互相平行且都等于高	都是全等的矩形	全等的正多边形	与底面平行且相等	矩形（有时全等）
平行六面体	底面是平行四边形的四棱柱	①具有一般棱柱的性质；②六个面都是平行四边形，且每相等的两个面平行且全等；③四条对角线交于一点且互相平分				
长方体	底面是矩形的直平行六面体	①具有平行六面体的性质；②六个面都是矩形；③四条对角线相等；④对角线的平方等于长、宽、高三度的平方和				
正方体	三度（长、宽、高）相等的长方体	①具有长方体的性质；②六个面都是全等的正方形；③对角线的平方等于棱长平方的 3 倍				

(2) 棱锥

棱锥的分类见表 2.2。

表 2.2 棱锥的分类

名称	定义	主要性质					
		侧棱	底面	侧面	对角面	斜高	平行于底面的截面
棱锥	一个面是多边形，其余各面是具有一个公共顶点的三角形所组成的多面体	交于一点	多边形	三角形	三角形	不一定相等	与底面相似，且分侧棱和高成比例线段（等于相似比）
正棱锥	底面是正多边形，顶点在底面的投影是底面中心的棱锥	交于一点且相等	正多边形	全等的等腰三角形	等腰三角形	都相等	与底面相似，且分侧棱和高成比例线段（等于相似比）

(3) 棱台

棱台的分类见表 2.3。

表 2.3 棱台的分类







名称	定义	主要性质					
		两底面	侧棱	侧面	对侧面	斜高	平行于底面的截面
棱台	平行于棱锥底面的平面截棱锥, 底面与截面之间的部分	对应边互相平行的相似多边形	延长后交于一点	梯形	梯形	不一定相等	与底面相似
正棱台	由正棱锥截得的棱台	对应边互相平行的正多边形, 且两底面中心连线垂直于底面	延长后交于一点, 且都相等	全等的等腰梯形	等腰梯形	都相等	与底面相似

2.1.3 旋转体

(1) 圆柱、圆台、圆锥

圆柱、圆台、圆锥见表 2.4。





表 2.4 圆柱、圆台、圆锥

项目	圆柱	圆锥	圆台
定义	一个矩形绕着它的一边(轴)旋转一周所得到的几何体 	一个直角三角形绕着固定的一条直角边旋转一周所得到的几何体 	一个直角梯形绕着它的直角腰旋转一周所得到的几何体 
截面	平行于底面的截面是与底面相等的圆 经过任意两条母线的截面是矩形	平行于底面的截面是与底面相似的圆 经过任意两条母线的截面是等腰三角形	平行于底面的截面是与上、下底面相似的圆 经过任意两条母线的截面是等腰梯形
性质			
侧面展开		$\alpha = \frac{r}{l} \times 360^\circ$ 	$\alpha = \frac{r-r'}{l} \times 360^\circ$ 
度量			
侧面积	$S = cl = 2\pi rl$	$S = \frac{1}{2}cl = \pi rl$	$S = \frac{1}{2}(c+c')l - \pi(r+r')l$
体积	$V = Sh = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$ $= \frac{1}{3}h(r^2 + rr' + r'^2)$

(2) 球及其部分

球及其部分见表 2.5。

表 2.5 球及其部分






项目	球	球冠(带)	球缺(台)	球扇形
定义	 <p>半圆以它的直径为旋转轴, 旋转而成的曲面所围成的几何体</p>	 <p>球面被平面截得的一部分 球面夹在两个平行截面间的部分</p>	 <p>球面被平面截下的一部分 球体夹在两个平行截面间的部分</p>	 <p>半圆内一个圆心角小于 180° 的扇形以半圆直径为旋转轴旋转一周所得的几何体</p>
度量	$S_{球面} = 4\pi R^2$ $S_{球面} = \pi D^2$ (R 为球的半径, D 为球的直径)	$S_{球冠} = 2\pi Rh$ $S_{球} = 2\pi Rh$ $S_{球带} = 2\pi Rh$ (R 为球半径, h 为球冠、球带的高)		
	$V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3$ $V_{球} = \frac{1}{6}\pi D^3$ (R 为球半径, D 为球直径)		$V_{球缺} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$ $V_{球缺} = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3r^2)$ $V_{球台} = V_{球缺} - V'_{球缺}$ $= \frac{1}{6}\pi h (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ (R 为球半径, h 是球冠高, r_1, r_2 是球冠底半径)	$V_{球扇形} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ [R 是球半径, h 是底面球冠(带)高]

2.1.4 正多面体

(1) 正多面体的种类和形状

正多面体的种类和形状见表 2.6。

表 2.6 正多面体的种类和形状

名称	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
直观图					

续表

名 称	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
展开图					
界面	正三角形	正方形	正三角形	正五边形	正三角形
多面角	正三面角	直三面角	正四面角	正三面角	正五面角

由若干个平面多边形围成的空间图形叫做多面体。围成多面体的各个多边形叫做多面体的面，两个面的公共边叫做多面体的棱，棱和棱的公共点叫做多面体的顶点。

一个多面体至少有四个面。多面体按照它的面数分别叫做四面体、五面体、六面体……

如果多面体的每个面都是有相同边数的正多边形，以每个顶点为端点都有相同棱数的凸多面体，叫做正多面体。例如，正方体的所有面都是正方形，以各个顶点为端点都有三条棱，而且它又是凸多面体，所以正方体是一种正多面体。

平面上的正多边形有无限多种，但在空间中只能构成五种不同的正多面体：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体。

(2) 正多面体欧拉定理

正多面体的顶点数、面数与棱数之间存在着一定的联系。

它们的顶点数 V 、棱数 E 及面数 F 有共同的关系式

$$V + F - E = 2 \quad (2.1)$$

这个定理叫做欧拉定理（其关系式叫做欧拉公式）。其实上述关系式对简单多面体都成立。表 2.7 列出正多面体的顶点数、面数与棱数。

表 2.7 正多面体的顶点数、面数和棱数

正多面体	顶点数 V	面数 F	棱数 E	正多面体	顶点数 V	面数 F	棱数 E
正四面体	4	4	6	正十二面体	20	12	30
正六面体	8	6	12	正二十面体	12	20	30
正八面体	6	8	12				

下面先简单介绍一下多面体的变形与简单多面体的概念，然后再对上述关系式给出说明。

正六面体，假定它的面是用橡胶薄膜做成的，如果充以气体，那么它就会连续（不破裂）变形，最后可变为一个球面（图 2.1）。

像这样，表面经过连续变形可变为球面的多面体，叫做简单多面体。棱柱、棱锥、正多面体等一切凸多面体都是简单多面体。

下面以四面体 $ABCD$ 为例加以说明（图 2.2）。

将它的一个面 BCD 去掉，再使它变为平面图形，四面体的顶点数 V 、棱数 E 与剩下的面数 F 变形后都没有变。因此，要研究 V 、 E 和 F 的关系，只要去掉一个面，将它变形为平面图形即可。对平面图形如下。

① 去掉一条棱，就减少一个面，例如去掉 BC ，就减少一个面 ABC 。同理，去掉棱

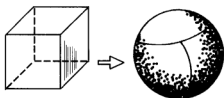


图 2.1 正六面体连续变形为球面

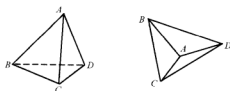


图 2.2 四面体

CD 、 BD ，也就各减少一个面 ACD 、 ABD (图 2.3)。由于 $F_1 - E$ 、 V 的值都不变，因此 $V + F_1 - E$ 的值也不变。

② 再从剩下的树枝形中，去掉一条棱，就减少一个顶点，例如去掉 CA ，就减少一个顶点 C 。同理，去掉 DA 就减少一个顶点 D ，最后剩下 AB (图 2.4)。

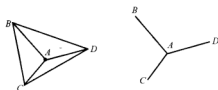


图 2.3 四面体减少面

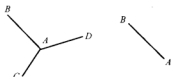


图 2.4 减少棱

在此过程中 $V - E$ 的值不变，但这时面数 F_1 是 0，所以 $V + F_1 - E$ 的值也不变。由于最后只剩下 AB ，所以

$$V + F_1 - E = 2 + 0 - 1 = 1$$

最后加上去掉的一个面，就得到

$$V + F - E = 2$$

因为对任意的简单多面体，运用这样的方法，最后都是只剩一条线段，所以都可得到上面的结果。从而欧拉定理对任意简单多面体都是正确的。

在欧拉公式中，令

$$f(p) = V + F - E \quad (2.2)$$

$f(p)$ 叫做欧拉示性数。简单多面体的欧拉示性数 $f(p) = 2$ 。

除简单多面体外，还有不是简单多面体的多面体。例如，将长方体挖去一个洞，连接底面相应顶点得到的多面体 (图 2.5)。它的表面不能经过连续变形变为一个球面，而能变为一个环面。观察图 2.5 中所示的多面体，数一数就可得知这个多面体有 16 个顶点，16 个面，32 条棱，因此，这个多面体的欧拉示性数

$$f(p) = 16 + 16 - 32 = 0$$

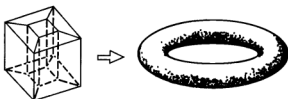


图 2.5 有洞的长方体连续变形为环面

这就是说这种带一个洞的多面体的欧拉示性数等于零。

研究简单多面体欧拉定理到底有什么重要意义呢？

过去研究的几何问题主要涉及到长度、距离、面积、全等度量问题，而欧拉定理与度量无关，它在引导人们进入一个新的几何学领域：拓扑学。如用一种可随意变形但不得撕破或粘连的材料（如橡皮泥）做成的图形，拓扑学就是研究图形在这种变形过程中的不变的性质。

从以上分析，可看到不同类型的多面体，它们的欧拉示性数也不同。事实上，数学家欧拉也正是在研究多面体分类时发现欧拉定理的。

前面已指出正多面体只有五种：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体。为什么呢？就没有其他正多面体吗？由欧拉定理研究这个问题。

由正多面体的定义可知，正多面体的每一个面的边数相同，每一个顶点连有相同数目的棱。因此可设正多面体的每个面的边数为 n ，每个顶点连的棱数为 m 。

设这个多面体有 F 个面，每个面有 n 条边，所以它一共有 nF 条边，由于每个边都是两个面的公共边，所以上面的计算每条边被计算过两次，因此，这个多面体实际上只有 $\frac{nF}{2}$ 条边。于是这个多面体的棱数为

$$E = \frac{nF}{2} \quad (2.3)$$

设这个多面体有 V 个顶点，每一个顶点处连有 m 条棱，所以它一共有 mV 条棱，又因为每条棱连着两个顶点，所以上面计算，每条边被计算过两次，所以又有

$$E = \frac{mV}{2} \quad (2.4)$$

代入欧拉公式 $V + F - E = 2$ ，得

$$\frac{2E}{n} + \frac{2E}{m} - E = 2$$

两边同除以 $2E$ ，整理可得

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{E} + \frac{1}{2} \quad (2.5)$$

由于 m 、 n 中的每个数都至少等于 3，但它们又不能同时大于 3。这是因为，如果它们都大于 3，则有

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

由于 $\frac{1}{E} > 0$ ，这是不可能的。所以 m 、 n 中至少有一个必等于 3。设 $n = 3$ ，则

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{E} > 0$$

即

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

由此得 $m \leq 5$ ，又因为 $m \geq 3$ ，所以

$$3 \leq m \leq 5 \quad (2.6)$$

设 $m=3$ ，同样可解得

$$3 \leq n \leq 5 \quad (2.7)$$

因此，可得表 2.8。

表 2.8 多面体与边、点、棱的数量关系

每个面的边数 n	每个顶点的棱数 m	多面体的棱数 E	多面体的名称
3	3	6	正四面体
4	3	12	正六面体
3	4	12	正八面体
5	3	30	正十二面体
3	5	30	正二十面体

满足正多面体定义的只有上表中列的五种，不会多也不会少。

2.2 柏拉图多面体与阿基米德多面体

多面体是一种简洁、确定的形体，它们可以作为立体构成设计中的基本结构。在多面体中，有五种基本的几何立体尤为重要，它们就是正多面体，通常也称为柏拉图多面体^①。

2.2.1 柏拉图多面体

多面体由许多表面组合而成。若每个表面都是等边等角的正多边形，而且形状和大小相同，这样的正多面体，称为柏拉图多面体。

① 正四面体：为正三角锥的立体造型，它是由四个相同的正三角形组成（图 2.6）。如果四面体以一个面为底放置，它的平面俯视图是一个等边三角形（图 2.7）。如果以一条边放置（不稳定的状态），它的平面俯视图是一个正方形（图 2.8）。

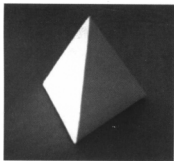


图 2.6 正四面体



图 2.7 以一个面放置的正四面体俯视图

① 对于所有五种多面体的描述是柏拉图给出的。在《蒂迈欧》中，他讲了如何用正三角形、正方形和正五边形构造这些正多面体。但正四面体、正六面体、正八面体应该归功于毕达哥拉斯学派；而正十二面体、正二十面体应该归功于狄埃太图斯（Theaetetus）。

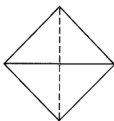


图 2.8 以一条边放置的正四面体的
平面俯视图

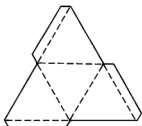


图 2.9 正四面体的展开图

如果多面体是用纸张来制作，要留出粘接面。（用纸张作为材料进行多面体的造型，是一种很有效的手段和方法。）如图 2.9 所示为正四面体的展开图，图中的实线是切割线，虚线是折叠线。（图中留出了供粘接用的面。下述的展开图同理。）

② 正六面体：为正方形立体造型，由六个相同的正方形组成。如果六面体以它的一个顶角为底，它的平面俯视图是一个正六边形（图 2.10）。图 2.11 所示是正六面体的展开图。

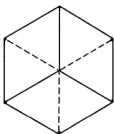


图 2.10 一个顶角为底的正六面体
平面俯视图

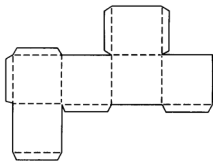


图 2.11 正六面体的展开图

③ 正八面体：为菱形多面体结构，由八个相同的正三角形组成。以八面体的一个顶角为底放置，其平面俯视图是一个正方形（图 2.12）；若以一个面为底放置，它的平面俯视图是一个六边形（图 2.13）。正八面体的展开图如图 2.14 所示，正八面体的效果图如图 2.15 所示。

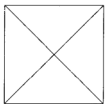


图 2.12 一个顶角为底的平面
俯视图（正八面体）

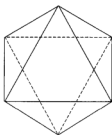


图 2.13 一个面为底的平面
俯视图（正八面体）

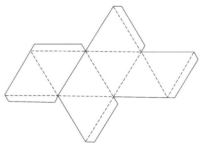


图 2.14 正八面体的展开图

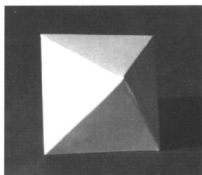


图 2.15 正八面体的效果图

④ 正十二面体：以正五边形平面为基础组成，由十二个相同的正五边形组成。以其一个面为底放置，平面俯视图是一个正十边形（图 2.16）。正十二面体的展开图如图 2.17 所示，正十二面体的效果图如图 2.18 所示。

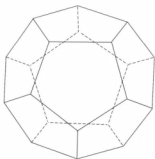


图 2.16 一个面为底的平面俯视图（正十二面体）

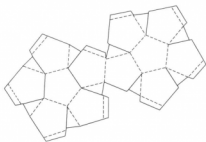


图 2.17 正十二面体的展开图

⑤ 正二十面体：以正三角形平面为基础组成，由二十个相同的三角形组成。如果以它的一个顶角为底放置，其平面俯视图也是一个正十边形（图 2.19）。正二十面体的效果图如图 2.20 所示，正二十面体的展开图如图 2.21 所示。

表 2.9 列出柏拉图多面体的基本造型结构。

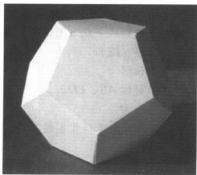


图 2.18 正十二面体的效果图

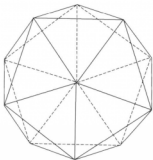


图 2.19 一个顶角为底的平面俯视图（正二十面体）

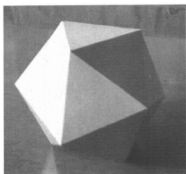


图 2.20 正二十面体的效果图

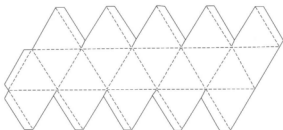


图 2.21 正二十面体的展开图

表 2.9 柏拉图多面体的基本造型结构

名称	平面数量 F	棱线数量 E	顶角数量 V	基本形	整体造型特征
正四面体	4	6	4	正三角形	正三角锥体
正六面体	6	12	8	正方形	正立方体
正八面体	8	12	6	正三角形	菱形体
正十二面体	12	30	20	正五边形	上下对称的六个五边形组成
正二十面体	20	30	12	正三角形	各面为五个正三角形组成的正五角锥体

2.2.2 常用的正多边形的绘制方法

在讨论了柏拉图多面体后，现介绍一下常用的正多边形的绘制方法，便于设计制作。

(1) 以外接圆求正三角形

画一个圆，用半径把圆周分为 6 等分。

把 6 等分的 A、B、C、D、E、F 各点中的 AC、CE、EA 用直线连接起来就求得正三角形（图 2.22）。

(2) 以外接圆求正六边形

正六边形的一条边长与半径相等，所以制图非常容易。

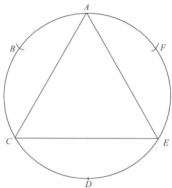


图 2.22 以圆求正三角形作图法

分别以直径与圆周相交的两点 A、B 为圆心，AO 为半径，在圆周上作弧，找到六个点，把这些点用直线连接起来，就求得正六边形（图 2.23）。

(3) 以外接圆求正五边形

画两条垂直相交的直径线 AB、CD。

求出半径 OD 的中心点 M。

以 M 点为圆心，以 MA 为半径作弧线交于 CD 线上的点为 E。

以 A 点为圆心，AE 的长度为半径画弧交圆周于 F 点，即 $AE = AF$ ，也就是五边形的一条边。依次在圆周上找到其余 4 个点，连接起来，就得到正五边形（图 2.24）。

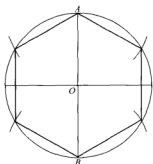


图 2.23 以圆求正六边形作图法

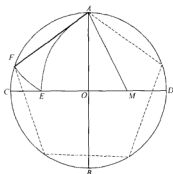


图 2.24 以圆求正五边形作图法

(4) 以一条边求正五边形

画一条垂直于 AB 的等分线，在等分线上截取 MC ，并使 $MC=AB$ 。

在 AC 的延长线上，以 C 为圆心，以 $\frac{AB}{2}$ 为半径画弧，交点为 D 。

以 A 点为圆心，以 AD 为半径画弧，交于 MC 的延长线上的点为 E 。

以 AB 为半径，分别以 A 、 B 、 E 为圆心画弧，把各交点用直线连接起来，就求得正五边形（图 2.25）。

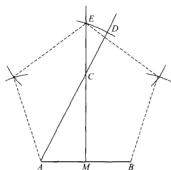


图 2.25 以一条边求正五边形作图法

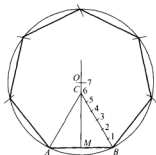


图 2.26 以一条边求正七边形作图法（一）

(5) 以一条边求正七边形

这里介绍两种绘图方法。

① 画出正三角形 ABC ， AB 为正七边形的一条边。正三角形的垂直等分线交于 AB 线上为 M 点。将正三角形的一条边 BC 分为 6 等分，以 $1/6$ 长度在 MC 的延长线上取 O 点， O 点是所求圆周的圆心。

以 O 点为圆心， OA 为半径画圆，然后在圆周上依次求出与 AB 相等的长度，将各点用直线连接，求出正七边形（图 2.26）。

② AB 为正七边形的一条边，以 B 为中心， AB 为半径画半圆交 AB 延长线于 D 点，又以 A 点为圆心， AB 为半径画弧交 AD 半圆弧于 E 点，从 E 点作 AB 的垂线 EC ，再于

圆上截取 $DF=EC$, 连接 BF , 即为正七边形的另一边。

然后, 作 BF 的垂直二等分线, 与 CE 延长线交于 O 点, 以 O 点为圆心, 以 OA 为半径作圆, 在圆上以 BF 长截取 G 、 H 、 I 、 J 各点, 连接各点, 即为所求之正七边形 (图 2.27)。

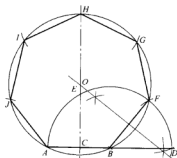


图 2.27 以一条边求正七边形作图法 (二)

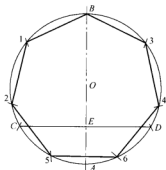


图 2.28 作辅助圆求正七边形作图法

(6) 作辅助圆求正七边形

AB 为圆的直径, 以 A 点为圆心, 以 AO 为半径画弧交圆于 C 点、 D 点, 连接 CD 线与 AB 交于 E 点, CE 即所求之正七边形的一边。用此边长, 以 B 为起点, 在圆上各截取 1、2、3、4、5、6 各点, 连接各点即为所求之正七边形 (图 2.28)。

(7) 以一条边求正八边形

在一条边 AB 的中点 M 作垂直线。在这条垂直线上找到 C 点, 使 $MC=AM=\frac{AB}{2}$ 。

以 C 点为圆心, CA 为半径画弧, 与垂直线的交点为 O 点。

O 点是求正八边形的外圆周的圆心。

以 O 点为圆心, OA 为半径画圆, 在圆上依次求出与 AB 相等的长度, 分别用直线连接各点, 求出正八边形 (图 2.29)。

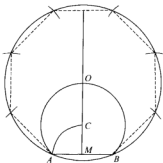


图 2.29 以一条边求正八边形作图法

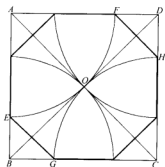


图 2.30 以正方形求正八边形作图法

(8) 以正方形求正八边形

正方形的 AC 、 BD 两条对角线的交点为 O 点。

分别以 A 、 B 、 C 、 D 各点为圆心, 以 OA 为半径画圆弧。

用直线顺序连接圆弧与正方形各边的交点，求出正八边形（图 2.30）。

在作上述各图形时，必须严格准确，否则将会产生误差，影响作图效果。另外，对已绘制出的图形，也应加以验证，对误差可进行调整。在作多面体的过程中，都要强调认真、精细，不然会影响到整个制作效果。

2.2.3 阿基米德多面体

阿基米德多面体，其组合的各个表面并不是单一的正多边形，而是超过了一种正多边形或等多边形。这样的多面体称作阿基米德多面体。阿基米德多面体其实就是柏拉图多面体的变异构成。其变化的基本原理是：将各柏拉图多面体切掉其顶角，在原来顶角占据的位置形成了新的平面。

一般情况下，顶角被切掉得越多，组成表面的平面增加的数量也越多，其多面体便越接近于圆球。对于顶角的切割，可采取在相邻棱线的中点间连线，也可以在棱线长度的 $1/3$ 处连线。由于切割棱线的部位不同，多面体所产生的造型，也各不相同。

(1) 十四面体

十四面体造型有 4 种构成方法，形成 3 种十四面体。

① 以正六面体为基础，在棱线的 $1/2$ 处，切去其顶角形成的十四面体（图 2.31），它由 8 个正三角形和 6 个正方形组成。以它的一个三角形面为底放置，其平面俯视图是一个正六边形（图 2.32），十四面体的效果图如图 2.33 所示，十四面体的展开图如图 2.34 所示。

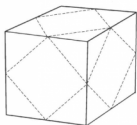


图 2.31 十四面体的
切割方法 (一)

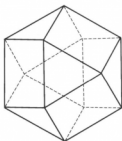


图 2.32 十四面体以三角形
面为底的俯视图 (一)

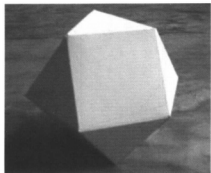


图 2.33 十四面体效果图 (一)

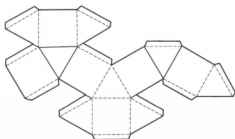


图 2.34 十四面体的展开图

② 以正八面体为基础，在棱线的 $1/2$ 处，切去 6 个顶角形成的十四面体（图 2.35）。这种十四面体和以正六面体为基础形成的十四面体相同。

③ 以正八面体为基础，在棱线的 $1/3$ 处，切去其顶角形成的十四面体（图 2.36），它由 8 个正六边形和 6 个正方形组成。效果图如图 2.37 所示，平面展开图如图 2.38 所示。如果以一个六边形为底放置，它的平面俯视图是一个邻近侧面不相等的十二边形（图 2.39）；如果以一个正方形为底放置，则平面俯视图是一个邻近侧面不相等的八边形（图 2.40）。

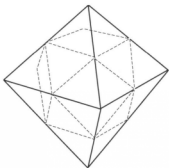


图 2.35 十四面体的切割方法 (二)

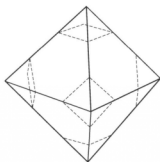


图 2.36 十四面体的切割方法 (三)

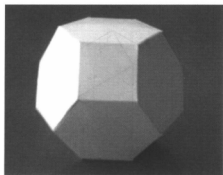


图 2.37 十四面体效果图 (二)

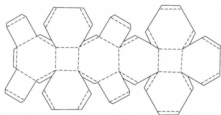


图 2.38 平面展开图



图 2.39 视角效果 (一)



图 2.40 视角效果 (二)

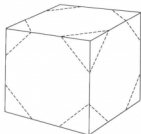


图 2.41 十四面体的切割方法 (四)

④ 以正六面体为基础，在棱线的 $1/3$ 处，切去其顶角形成的十四面体（图 2.41），它由 8 个正三角形和 6 个正八边形组成。如果以一个正八边形为底放置，则平面俯视图是一

个正方形(图 2.42)。若以它的一个三角形面为底放置,其平面俯视图是一个十二边形(图 2.43),效果图如图 2.44 所示。

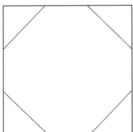


图 2.42 十四面体以一个正八边形为底的俯视图



图 2.43 十四面体以三角形面为底的俯视图(二)

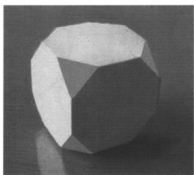


图 2.44 十四面体效果图(三)

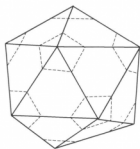


图 2.45 由正二十面体形成的三十二面体(一)

(2) 三十二面体

其加工方法有 4 种。

① 以正二十面体为基础,在棱线的 $1/3$ 处,切去顶角形成的三十二面体(图 2.45)。它由 12 个正五边形和 20 个正六边形组成,三十二面体的平面展开图(图 2.46)。

② 以正二十面体为基础,在棱线的 $1/2$ 处,切去顶角形成了三十二面体(图 2.47),由 12 个正五边形和 20 个正三角形组成,其平面展开图如图 2.48 所示。

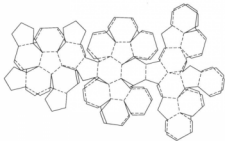


图 2.46 三十二面体的平面展开图(一)

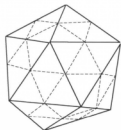


图 2.47 由正二十面体形成的三十二面体(二)

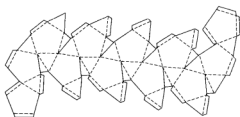


图 2.48 三十二面体的
平面展开图 (二)

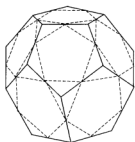


图 2.49 由正十二面体形成
的三十二面体 (一)

③ 以正十二面体为基础，在棱线的 $1/2$ 处，切去顶角形成了三十二面体 (图 2.49)。也是由 12 个正五边形和 20 个正三角形组成，其平面展开图如图 2.50 所示。

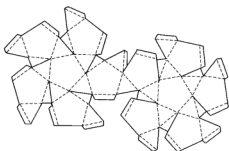


图 2.50 三十二面体
的平面展开图 (三)

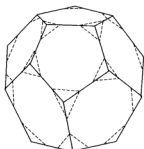


图 2.51 由正十二面体
形成的三十二面体 (二)

④ 以正十二面体为基础，在棱线的 $1/3$ 处，切去顶角形成了三十二面体 (图 2.51)。它由 12 个正十边形和 20 个正三角形组成，其平面展开图如图 2.52 所示。

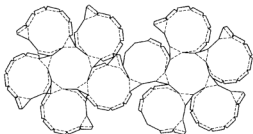


图 2.52 三十二面体的平面展开图 (四)

(3) 阿基米德八面体

前述的由正四面体，在其棱边的 $1/2$ 处截去 4 个角所形成正八面体，与正四面体相同的是它的各面还是正三角形，只不过再增加了 4 个，由 8 个正三角形组成。而在这个四面体棱边的 $1/3$ 处截去 4 个角后，所形成的八面体，则是由 4 个正三角形和 4 个正六边形组成的。图 2.53 是其效果图，图 2.54 是其平面展开图。

表 2.10 为以柏拉图多面体为基础转换为阿基米德多面体关系表。

表 2.10 以柏拉图多面体为基础转换为阿基米德多面体关系表			
A. 正四面体 (正三角形)	$\xrightarrow{1/2 \text{ 处减去 } 4 \text{ 个角}}$	C. 正八面体 (正三角形)	$\xrightarrow{1/2 \text{ 处减去 } 6 \text{ 个四棱锥角}}$ $\xrightarrow{1/3 \text{ 处减去 } 6 \text{ 个四棱锥角}}$
			十四面体 [正方形 6 个] [正三角形 8 个]
B. 正六面体 (正方形)	$\xrightarrow{1/2 \text{ 处减去 } 8 \text{ 个角}}$ $\xrightarrow{1/3 \text{ 处减去 } 8 \text{ 个角}}$		[正方形 6 个] [正六边形 8 个] [正八边形 6 个] [正三角形 8 个]
D. 正十二面体 (正五边形)	$\xrightarrow{1/3 \text{ 处减去 } 20 \text{ 个三棱锥角}}$ $\xrightarrow{1/2 \text{ 处减去 } 20 \text{ 个三棱锥角}}$		三十二面体 [正十边形 12 个] [正三角形 20 个]
E. 正二十面体 (正三角形组成五角锥)	$\xrightarrow{1/2 \text{ 处减去 } 12 \text{ 个五棱锥角}}$ $\xrightarrow{1/3 \text{ 处减去 } 12 \text{ 个五棱锥角}}$		[正五边形 12 个] [正三角形 20 个] [正五边形 12 个] [正六边形 20 个]

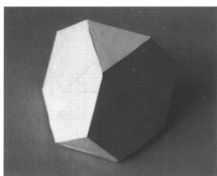


图 2.53 阿基米德八面体效果图

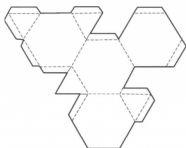


图 2.54 阿基米德八面体展开图

2.3 多面体的繁衍、变异

以柏拉图多面体为基础进行切割，形成的多面体的表面就不再是单一的正多边形了，就成为阿基米德多面体。而且又可以再在阿基米德多面体上切割，形成更多的平面。所以可以在任何一种多面体上切除棱角，只不过，多面体的面越多，表面就越来越平滑，最后成为圆球。或者在多面体的棱角、棱边等处进行处理，比如凸凹变化等，造成丰富的变化。

2.3.1 切割处理

(1) 二十六面体

二十六面体是在阿基米德多面体（十四面体）的基础上再进行切削棱角后所形成的多面体。

① 在十四面体的基础上，在棱线的 $1/2$ 处，切去顶角就形成了二十六面体。它有 18 个正方形和 8 个正三角形（图 2.55）。若以一个正方形面为底放置，其平面俯视图是一个正八边形（图 2.56）；若以一个三角形面为底放置，则平面俯视图是一个正六边形（图 2.57）。平面展开图如图 2.58 所示。

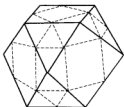


图 2.55 二十六面体（一）

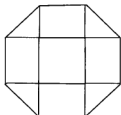


图 2.56 二十六面体视角（一）

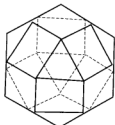


图 2.57 二十六面体视角（二）

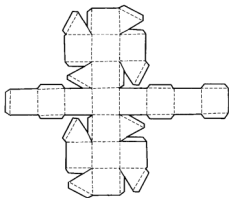


图 2.58 二十六面体平面展开图（一）

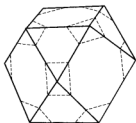


图 2.59 二十六面体（二）

② 以十四面体为基础，在棱线的 $1/3$ 处，切去顶角形成二十六面体。它有 6 个正八边形，8 个正六边形和 12 个正方形（图 2.59）。二十六面体的平面展开图如图 2.60 所示。

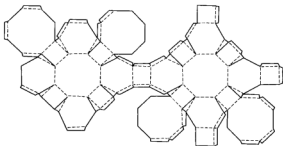


图 2.60 二十六面体平面展开图（二）

如果以一个六边形为底放置，其平面俯视图是一个正十二边形（图 2.61），如果以一个八边形为底放置，它的平面俯视图是一个邻近侧面不相等的八边形（图 2.62）。

③ 除以十四面体经过切角处理转换为二十六面体外，还在所形成的二十六面体上，进行加工，形成另外的二十六面体。其具体加工方法是，在①所形成的二十六面体顶角部位，进行切割加工，并调整其表面造型，把相连的一个正方形扩大为正八边形。另一个缩小为小正方形，原有的正三角形，扩大为正六边形，构成为新的二十六面体。图 2.63 为其转换示意图。

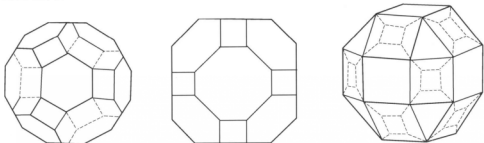


图 2.61 二十六面体视角（三） 图 2.62 二十六面体视角（四） 图 2.63 二十六面体转换示意图

（2）三十八面体

这个多面体是由正方形、正三角形组成的二十六面体结构，经修正加工转换而来的。其加工方法是，将原有正方形平面，每相隔一个，改换为用 2 个正三角形合成的平行四边形，从而形成成为正方形间斜向衔接的三十八面体。该立体造型是由 6 个正方形平面，和 32 个正三角形平面组成，其棱角顶点 24 个，棱线 48 条。图 2.64 为三十八面体结构效果图，图 2.65 为其加工展开图。

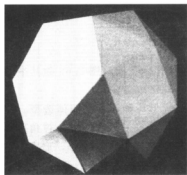


图 2.64 三十八面体结构效果图

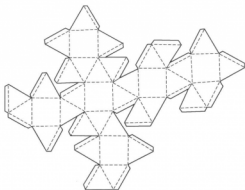


图 2.65 三十八面体加工展开图

（3）六十二面体

① 由三十二面体（正五边形和正三角形组成）转化而来。其加工方法是，将正五边形和正三角形的棱线，在中间点连线，从而切掉了五边形顶部四角锥，形成了不等边的四边形。在此基础上再调整部分边长，将五边形棱线中点连线内移，缩小五边形，使长方形修正加工为正方形。该结构表面由正五边形 12 个、正方形 30 个、正三角形 20 个组成。

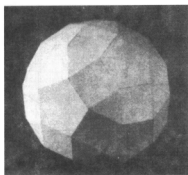


图 2.66 六十二面体的效果图 (一)

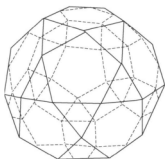


图 2.67 六十二面体转化示意图

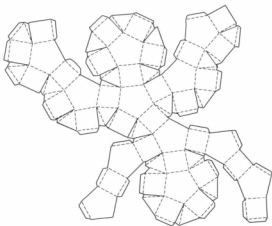


图 2.68 六十二面体平面展开图 (一)

图 2.66 为六十二面体的效果图, 图 2.67 为六十二面体转化示意图, 图 2.68 为其平面展开图。

② 用上例六十二面体, 再经过切割加工, 又可塑造出另一种六十二面体造型。这种造型是在上例六十二面体基础上, 扩大其五边形为十边形, 将五边形的顶部, 过角顶横向切割, 使原有的正三角形, 改变为正六边形, 原有的正方形平面在原位缩小, 形成由正十边形 12 个、正方形 30 个、正六边形 20 个所组成的六十二面体结构造型。图 2.69 为六十二面体效果图, 图 2.70 为其加工示意图, 图 2.71 为其平面展开图。

(4) 九十二面体结构

这是由 12 个正五边形平面, 80 个正三角形平面所组成的。

九十二面体的结构, 是由六十二面体经过修正加工转换而来的。其加工方法是, 将五边形每边相连接的正方形, 修改为 2 个颠倒的正三角形组成的平行四边形。从而将六十二面体结构中的 30 个正方形, 改换为 60 个正三角形, 加上原有的 20 个正三角形, 合计为 80 个。

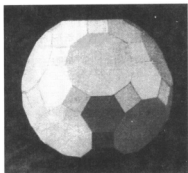


图 2.69 六十二面体的效果图 (二)

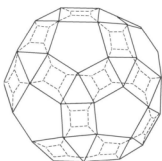


图 2.70 六十二面体加工示意图

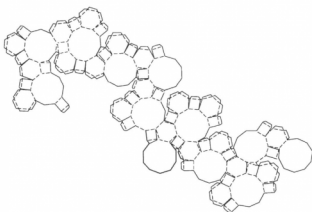


图 2.71 六十二面体平面展开图 (二)

其平面展开图,是以 12 个正五边形为中心,每个五边形的周围,连接 5 个正三角形,组成一个正五角星,以此为单元进行组合构成 (图 2.72)。

其中上半部和下半部各有 6 个单元,顶和底的 2 个单元,除“五角星”外,每个角侧再附加一个正三角形,即每个单元为一个正五边形,周围为 10 个正三角形。其余的 10 个单元,每个单元附加一个正三角形。在整体排列上,以顶的单元为中心,周围排列 5 个单元,该 5 个单元的外围,又延伸一个单元,以此组成多面体的下半部。图 2.73 为九十二面体的效果图,图 2.74 为由六十二面体加工转化成九十二面体的示意图。

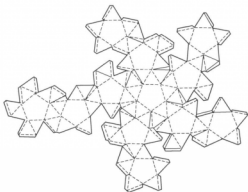


图 2.72 九十二面体平面展开图

(5) 一百八十面体

这是在三十二面体结构基础上,经过修正加工而成的。其加工方法是,将原有正五边形平面,改变为五角锥体(由5个等腰三角形组成),将原有的正六边形平面,同样改变为六角锥体(由6个等腰三角形组成)。合计为12个五角锥体(60个三角形),20个六角锥体(120个三角形)所组成,图2.75为其展开图。

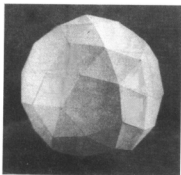


图 2.73 九十二面体的效果图

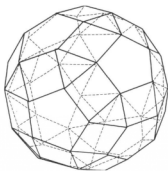


图 2.74 九十二面体加工示意图

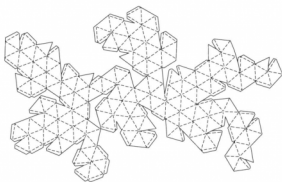


图 2.75 一百八十面体展开图

2.3.2 凸凹变化

多面体的每一个表面,又可由凹下或凸起的棱角组织来替代,形成若干个新的结构,出现更多的起伏和凹凸,使得多面体更富变化。

① 正二十面体的凹加工,是在正二十面体相邻棱线的1/3点连线,并在其顶角部位向内凹入所构成。含六边形平面20个,在原有顶角部位,凹下五角形锥体12个。图2.76为效果图,图2.77为其在棱线1/3处连线的加工展开图。

② 以三十二面体为基础,在正五角形的部位,进行五角锥形的凹入构成。

加工方法:三十二面体表面包括正五边形12个。其凹入的正五边形锥体加工,是以正六角形为一个单元,用其中5个正三角形,组成凹入的锥体,余下的一个三角形改为粘口而成,原三十二面体的正三角形,是在凹入五角锥的单元中间,间隔两个对角的正三角形20个所构成。图2.78为效果图,图2.79为展开图。

③ 图2.80是在正六面体的基础上,将各面凸出一个四棱锥的四十八面体的造型。6

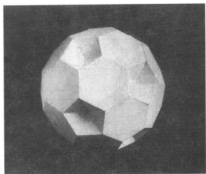


图 2.76 正二十面体凹加工效果图

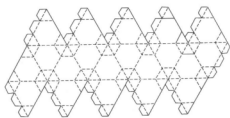


图 2.77 1/3 处连线的加工展开图

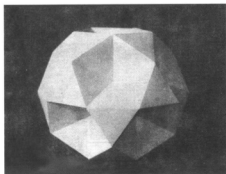


图 2.78 三十二面体凹入构成的效果图

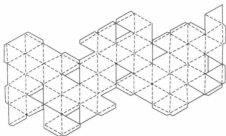


图 2.79 三十二面体凹入五角锥展开图

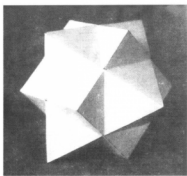


图 2.80 四十八面体效果图

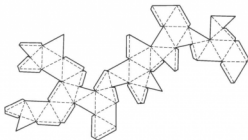


图 2.81 四十八面体加工展开图

个四棱锥体的整体结构，为一个穿插在正六面体中的正八面体。即：正八面体的正四棱锥基本形，为正三角形平面，而正六面体的三角锥的基本形，为一个直角三角形。图 2.80 为该造型的效果图；图 2.81 为其加工展开图。

④ 在二十面体上刻痕，进行折叠，就形成一个二十面体的变异结构（图 2.82）。其效果从不同的角度看，都呈现出五角星的造型。图 2.83 是其平面展开图。

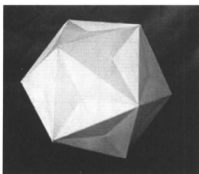


图 2.82 二十面体的
变异结构

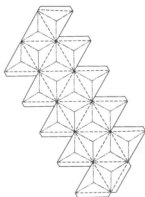


图 2.83 二十面体变异
结构平面展开图

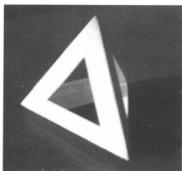


图 2.84 正四面体挖孔后的效果图

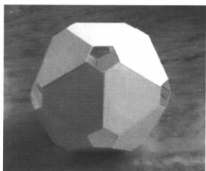


图 2.85 正二十面体挖孔后的效果图

2.3.3 表面挖割

多面体的表面，可以挖割。若多面体是空心的，表面的孔洞，可将内在的空间呈现出来（图 2.84，图 2.85）。

2.3.4 边缘处理

多面体的边缘，也可通过两个表面相互拼贴，形成新的边缘形式。如使用一个圆形，内接一正三角形，如图 2.86 所示，沿虚线折叠，形成一个带圆弧边缘的三角形。以此形为基础，一一把它们的边缘拼贴在一起，形成正四面体（图 2.87），或者正八面体、正二十面体。边缘可以是弧线，也可以是直线或者其他线形（图 2.88）。也可以用圆内接五边形，折叠出五条弧形边缘，把这个形的边缘依次拼贴，形成一个正十二面体（图 2.89）。

2.3.5 群化结构

群化，是一种群体效应，能把本来显得简单的东西变得富有震撼力。是由单一的个体集聚在一起，构成的结构形式。它是用单体的立体造型，按照某种设计意念，灵活地组合在一起，构成富有震撼的群化结构（图 2.90～图 2.93）。

群化的结构，要达到较好的视觉效果，通常可掌握下列各要点。

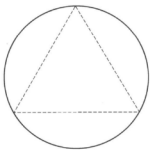


图 2.86 圆内接正三角形

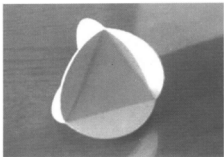


图 2.87 弧线边缘正四面体

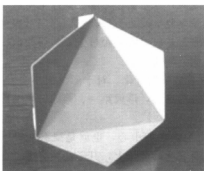


图 2.88 直线边缘正四面体

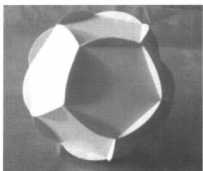


图 2.89 边缘拼贴形成的正十二面体

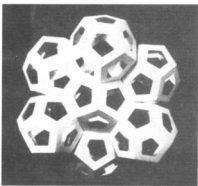


图 2.90 由正十二面体挖孔处理后组成的群化效果

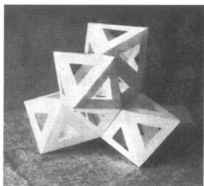


图 2.91 由相同的多面体挖孔处理后组成的群化效果

① 要设计好单体的基本造型。其单体的基本造型要精巧、简练，避免出现过多、过小的琐碎变化。另外，作为主体物的单体造型，还要有一定的厚度，使其在整体上表现出一定的量感。

② 单体间的连接。在单体之间的连接上，要处理好其整体效果和单体间的衔接关系。

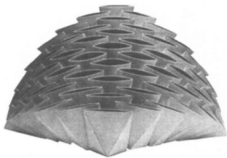


图 2.92 由渐变造型的立体形成的
具有韵律感的群化效果

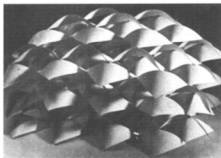


图 2.93 由弧面造型
构成的群化效果

集聚构成在表现形式上的主要特征：一是形象的重复美；二是形象之间在整体上所形成的韵律美。在一件集聚作品中，造型的主体特征，应是重复形或近似形，它们之间可表现出一种同一的秩序，给人的感觉和谐一致。在排列次序上，应避免相距过大，显得松散。其单体造型的关系，可从小到大或从密到疏，表现出优美的韵律。

③ 在整体关系上，要注意形象的完整性，又要有适当的变化。对于形象大小的安排，要有适当的比例，在高低、长短和疏密关系上，要错落穿插，形成第一、第二、第三层次和秩序。

④ 突出表现中心。在集聚的作品里，一般应有要表现的中心，也就是要有能吸引观者注意的焦点。使作品有主有次，有实有虚。在主要表达的部位上，其形象要完美，富于变化，次要部分又要起到一定的呼应和陪衬作用。

⑤ 重心稳定。在整体造型上，重心要平稳，可以排列成各种不同的造型形式。

2.4 小结

① 立体几何研究不位于同一平面的几何图形（包括多面体、旋转体、球体和其他立体）的形状，相对位置、大小及其他度量性质，在设计中应用最多的是多面体。

② 多面体欧拉定理阐述了顶点数、棱数以及面数之间的关系式，对简单多面体都成立，并引导进入一个新的几何学领域——拓扑学。

③ 柏拉图多面体是正多面体，有 5 种基本的几何立体形式，其每个表面都是等边等角的正多边形，形状和大小都相同。

④ 阿基米德多面体由超过一种正多边形或等多边形组成，是柏拉图多面体的变异构成。

⑤ 对基本结构进行切割造型、凸凹变化、边缘处理、棱角加工、群化结构等处理，可以使多面体呈现出多种多样的丰富变化，并在许多场合得到实际应用。

第3章

设计透视与透视阴影



- 透视
- 透视图
- 透视阴影
- 小结

“直线的画面迹点和其透视灭点的连线决定直线的透视方向”，这是透视学的精髓。以这一精髓为先导，以视线法科学原理为基础，可以对直线的透视规律进行研究。设计透视绘制法则是视线法法则，客观地反映了人眼睛成像的科学原理，用视线法绘制透视图准确逼真。

设计透视在“透视”二字前冠以设计，意在阐明透视图绘制原则与“绘画透视”有本质区别。设计绘制法则的基础是三面投影理论，遵循的规律是人眼睛的成像原理，根据的是空间物体三维尺度。运用设计透视所绘制的透视效果图和照片一样逼真，尽管摄影机的成像原理和人眼成像原理相似，但摄影机只能重现空间的图像，而运用设计透视法则能准确预现设计师的设计意图。

在平面上加上阴影就会产生立体感。阴影是设计制图与绘画中表现空间关系最好的方法之一，对于表现产品形态及空间结构关系有直接的作用。在透视图上加绘阴影，通常采用平行光线，光线照射方向可按透视图所表达物体的形状特征进行适当选择。在设计中常常利用这种视觉现象，来强调物体的体积感和空间感。

3.1 透视

3.1.1 透视的基本概念

3.1.1.1 透视图的形成

把一透明的平面放置在人和建筑之间，使平面 P 垂直于 H 面。人透过画面看建筑物，如果把建筑物上各点与人的眼睛连线，这些连线与平面 P 相交，再把各交点连接起来，在平面上便构成一幅图画，这种图叫透视图，或称为透视投影，简称透视，如图 3.1 所示。

透视图是以人的眼睛为中心的中心投影，实际是人观察物体时，由人的眼睛引向物体的视线（直线）与画面（平面）的交点集合。透视图实际上就是求作直线与平面的交点问题。

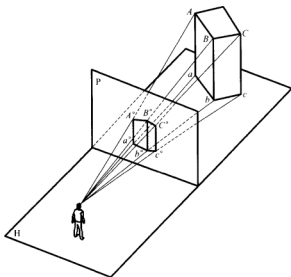


图 3.1 透视图

3.1.1.2 透视图的作用

平面图、立面图、剖面图、总平面图是设计师对所设计项目的施工表达，并表达了功能、效益、材料、环境等内容。透视图是将设计意象转变成准确、逼真的三维空间图像并预现出来，供有关各方面人员研究；同时设计师可根据这些直观的图像来推敲设计方案的优劣，作为调整和修改设计的依据之一。可以说透视图是优秀设计的基础。

3.1.1.3 透视图的特点

人们在日常生活中观察一座大楼时，若留意观看，可以发现：每一层窗户的上沿口线和窗台的边线，在远处会聚于一点，而实际上它们是相互平行的；窗户近大远小，近宽远窄，可实际上它们是等大的。

看一幅建筑的照片，如图 3.2 所示，同样重复如上所说：近大远小，近宽远窄，本来实际上平行的线条在照片上也会聚于一点。

3.1.1.4 透视作图中的常用术语

在学习透视学或绘制透视图时，必须用到一些专门用语。理解、熟记它们的确切意思，是学习好透视图和绘制透视图的最基本条件。如图 3.3 所示。

基面——放置物体的水平面，用字母 H 表示，可以理解为三面投影体系中的水平投影面 H。

画面——透视图所在的平面，用字母 P 表示。求平行正透视和成角正透视时，画面 P 垂直于基面 H。可以理解为画面 P 是三面投影体系中的正立投影面 V。

基线——基面与画面的交线，在画面上以 gg 表示基线。

视点——相当人眼所在的位置，即投影中心，用字母 S 表示。

站点——视点 S 在基面上的正投影，用 s 表示，相当于观察者的站立点。

心点——视点 S 在画面 P 上的正投影以 s^0 表示。



图 3.2 建筑物反映的透视图

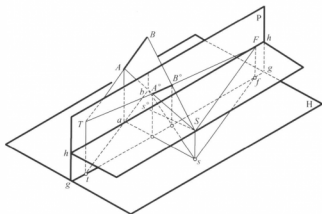


图 3.3 透视常用术语图解

中心视线——引自视点并垂直于画面的视线，即视点 S 和心点 s° 的连线。

正视平面——过视点 S 作的水平面，所有水平的视线都在正视平面上。

视平线——正视平面与画面的交线，用字母 hh 表示。作正视透视时，画面垂直基面，心点 s° 位于 hh 上。

视高——视点 S 对基面的距离。作正视透视时，画面垂直基面，视平线与基线的距离反映视高。

视距——视点对画面的距离，即中心视线 Ss° 的长度。作正视透视时，画面垂直基面，站点与基线距离反映视距。

灭点——画面相交线（倾斜、垂直于画面的直线）上无限远的点的透视，称为直线透视的灭点，如图 3.3 中的 F 、 s° 。

迹点——直线与画面的交点，称为直线的画面迹点。用字母 T 、 t 表示。

3.1.2 点和直线的透视规律

3.1.2.1 点的透视

① 点的透视仍为点，就是过该点的视线与画面的交点。

② 点与该点水平投影的透视，在同一铅垂线上，如图 3.4 所示。

点 A 的透视 A° ，点 A 的水平投影 a 的透视 a° ， $A^\circ a^\circ$ 必在同一铅垂线上。

Aa 垂直 H 面，所以 AaS 这一视平面是一铅垂面，垂直于 H 面， P 垂直于 H 面，它们的交线 $A^\circ a^\circ$ 垂直于 H 面（两平面垂直于第三平面，两平面的交线必垂直第三平面）。

$A^\circ a^\circ$ 的长度叫做 A 点的透视高度。是 A 点的实际高度 Aa 的透视，通常不与实际高度相等。

3.1.2.2 直线的透视

直线的透视仍为直线。只有当直线通过视点时，其透视成为一点；直线在画面上时，其透视为本身，如图 3.5 所示。

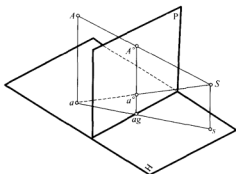


图 3.4 点的透视特性

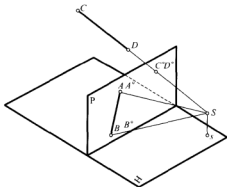


图 3.5 特殊直线的透视图规律

CD 通过视点，其透视为一点，即 CD 的画面迹点。

直线 AB 在画面 P 上， $A^\circ B^\circ$ 与本身重合。

除上述两种直线的透视特殊外，直线的透视均按画面相交线、画面平行线分类。

在作正视透视时把三面投影体系中的正立投影面 V 当作画面，把水平投影面 H 当作基面。

四种画面相交线：正垂线、侧平线、水平线、一般位置直线。

三种画面平行线：正平线、侧垂线、铅垂线。

如图 3.6 所示， CB 、 NR 是水平线的透视，它们会聚一点 F_x ； DA 、 NJ 是水平线的透视，它们会聚一点 F_y ；铅垂线的透视，没有灭点； B_1D_1 、 DE 是一般位置直线的透视，它们会聚一点 F_1 ； EA 是一般位置直线的透视，它会聚于一点 F_2 ； $F_1F_yF_2$ 同一条铅垂线上，并且 $F_1F_y = F_2F_y$ ； B_1D_1 、 DE 是上行斜线，所以灭点 F_1 在水平线的灭点 F_y 之上； EA 是下行斜线，所以灭点 F_2 在水平线的灭点 F_y 之下。

七种位置直线，四种是画面相交线，三种是画面平行线。在物体外轮廓上，画面平行线与画面相交线总是要相交的，在求作画面相交线线段的透视的同时，就求出了画面平行线的透视。所以在以后各章节中，只对四种画面相交线线段的透视求作方法进行深入研究。

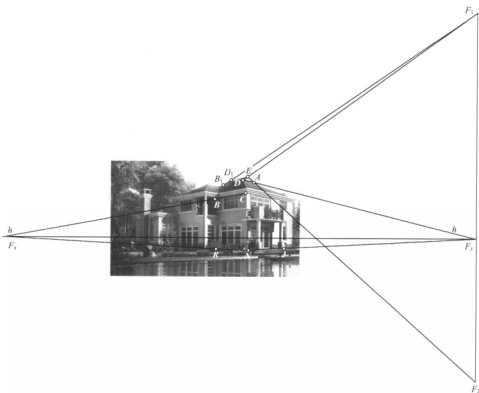


图 3.6 三种直线的透视规律

3.2 透视图

3.2.1 透视图的分类

由于绘图者所确定的画面位置不同，所以物体的长、宽、高三组主要方向的轮廓线，有的与画面平行，有的与画面相交。本书划分透视图的标准是：物体的长、宽、高三组主要方向的轮廓线，有一组或两组和画面平行时所作的透视图，称为平行透视图；否则称为成角透视图。

3.2.1.1 平行透视图（也称一点透视）

(1) 平行正视透视图

如图 3.7 所示，物体三组主向轮廓线与画面的相对位置是：长，垂直于画面，长是正垂线。透视的灭点是心点 s^0 。宽，平行于画面。高，平行于画面。图 3.8 所示为平行正视透视图实例。

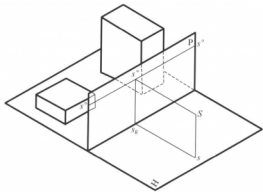


图 3.7 平行正视透视图的形成

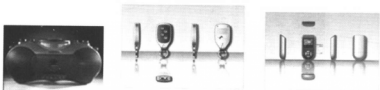


图 3.8 平行正视图透视图实例

(2) 平行正俯视图透视图

如图 3.9 所示, 物体三组主向轮廓线与画面的相对位置是: 长, 平行于画面。宽, 平行于画面。高, 垂直于画面。高是正垂线。透视的灭点是心点, $P \perp H$ 。图 3.10 所示为平行正俯视图透视图实例。

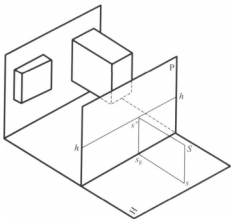


图 3.9 平行正俯视图透视图的形成

(3) 平行斜俯视图透视图

如图 3.11 所示, 把图 3.9 中的画面 P , 以基线 gg 为轴转动, 向物体一方倾斜。物体三组主向轮廓线与画面的相对位置是: 长, 倾斜于画面, 透视的灭点是 F_x 。宽, 平行于画面。高, 倾斜于画面, 透视的灭点是 F_y 。图 3.12 所示是平行斜俯视图透视图实例。

3.2.1.2 成角透视图 (也称二点透视)

(1) 成角正视图透视图

如图 3.13 所示, 物体三组主向轮廓线与画面的相对位置是: 长, 倾斜于画面, 长是水平线。透视的灭点是 F_x 。宽, 倾斜于画面。宽是水平线。透视的灭点是 F_y 。高, 是铅垂线。平行于画面。图 3.14 所示是成角正视图透视图实例。

(2) 成角斜俯视图透视图

如图 3.15 所示, 把图 3.13 中的画面 P 以基线 gg 为轴转动, 向物体一方倾斜。物体三组主向轮廓线与画面的相对位置是: 长, 倾斜于画面, 透视的灭点是 F_x 。宽, 倾斜于画面, 透视的灭点是 F_y 。高, 倾斜于画面, 透视的灭点是 F_z 。



图 3.10 平行正俯视透视图实例

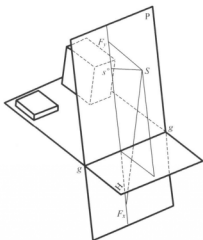


图 3.11 平行斜俯视透视图的形成



图 3.12 平行斜俯视透视图实例

(3) 成角仰视透视图

如图 3.16 所示,把图 3.13 中的画面 P 以基线 gg 为轴转动,向视点 S 一方倾斜物体三组主轮廓线与画面的相对位置是:长,倾斜于画面,透视的灭点是 F_x 。宽,倾斜于画面,透视的灭点是 F_y 。高,倾斜于画面,透视的灭点是 F_z 。图 3.17 所示为成角仰视透视图实例。

3.2.2 透视图的简易画法

绘制透视图的繁与难主要在于确定灭点、视点(视高、视距、视角)等透视参数。而造型设计的效果图要能表达出设计意图,能体现所设计的外观效果,力求避免在绘图过程

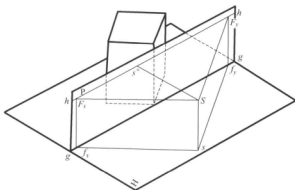
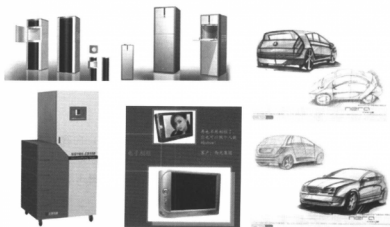


图 3.13 成角正透视视图的形成



(a)



(b)

图 3.14 成角正透视视图实例

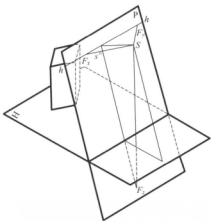


图 3.15 成角斜俯视透视图的形成

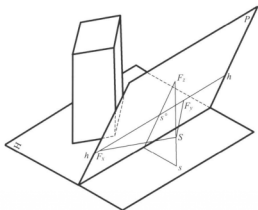


图 3.16 成角仰视透视图的形成



图 3.17 成角仰视透视图实例

中耗费大量时间,因此,可把透视图的做法简易化,程式化,以利于在实际工作中提高绘制透视图的效率。

3.2.2.1 45°倾角透视法

45°倾角透视法是在量点法的基础上,通过简化的一种较为实用的快速作图方法,值

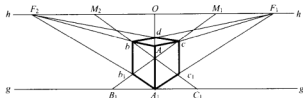


图 3.18 45°倾角透视法

得指出的是，视高要选取适当，否则易产生变形，其绘图方法如图 3.18 所示。

- ① 任画一水平线作为视平线 hh ，在 hh 上确定两个点作为灭点 F_1 和 F_2 。
- ② 取 F_1 和 F_2 的中点为心点 O ，再分别等分 OF_1 和 OF_2 得 M_1 、 M_2 两个量点。
- ③ 选定适当视高并作基线 gg ，由心点 O 作垂线交 gg 得 A_1 点，由 A_1 点向上量取立方体真高得点 A 。分别在 A_1 点的左、右以立方体的实长和实宽量取两点 B_1 、 C_1 。
- ④ 连接 A_1F_1 、 A_1F_2 和 AF_1 、 AF_2 ，再连接 B_1M_1 和 C_1M_2 交 A_1F_2 得 b_1 点、交 A_1F_1 得 c_1 点。
- ⑤ 由 b_1 点、 c_1 点向上引垂线得 b 点、 c 点。连接 bF_1 和 cF_2 得交点 d ，加深轮廓，即完成作图。

3.2.2.2 30°~60°倾角透视法

30°~60°倾角透视法类同于 45°倾角透视法，只是在确定量点和心点的位置时有所不同，即把 F_1F_2 的中分点定为量点 M_1 ， M_1F_2 的中分点定为心点 O ， OF_2 的中分点定为量点 M_2 （图 3.19）。图 3.19 所示是侧重表达右侧面的，若需侧重表达左侧面，则可按同样的方法向右等分。

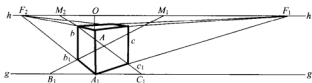


图 3.19 30°~60°倾角透视法

3.2.2.3 平行透视法

平行透视法是在距点法的基础上简化的一种作图方法（图 3.20），其作图步骤如下。

- ① 任作一视平线 hh ，在适当位置定出心点 O 和距点 D_h 。
- ② 选定视高并作基线 gg ，在基线上画出立方体正立面的实形 $ABCD$ （宜在 OD_h 对称线上），在 A 点的右边量取立方体的宽度并确定 A_1 点。
- ③ 过 A 、 B 、 C 、 D 四点分别向 O 点连线，再连接 D_hA_1 交 AO 得点 a ，过 a 点作 AB 的平行线交 BO 于 b 点，过 b 点作 BC 的平行线交 CO 于 c 点，加深轮廓，即完成

图 3.20 平行透视法

全图。

该图例侧重表达正面，顶面和右侧面，若需重点表现正面、顶面和左侧面时，只要将 O 和 D_0 对调即可。

3.2.2.4 倍增分割法

根据所画物体的形体特征，有的需要在立方体的基础上叠加半个、一个或两个同样的立方体，有的则需要把原有的立方体划分成若干小的立方体。如图 3.21 所示，现以该图右侧面 AA_1B_1B 为例介绍其作图步骤：分别连接 AB_1 和 A_1B 得交点 O_2 ，过 O_2 点作 AA_1 的平行线得 NN_1 ，再连 O_2m (m 为 AA_1 的中点)，即把 AA_1BB_1 划分为四等分。连接 NO_1 (以 O_1 点为 BB_1 的中点) 交 A_1B_1 的延长线于 q_1 ，过 q_1 作 AA_1 的平行线交 AB 的延长线于 q ，用相同的作图方法连接上顶面，即向右增加了半个立方体。类推，可倍增一个，一个半，两个……向左的作图方法相同。

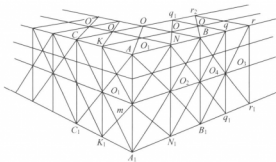


图 3.21 形体的倍增

图 3.22 所示为一货车的透视图起稿过程。先是作出一立方体的两点透视图，并分割成若干小立方单元，叠加出所需的长度，而后按此货车的正立面和侧立面图形，往上嵌入，进行挖减、增、添，尺寸大小按比例在网格上配对。这种方法习惯上也称为网格法。

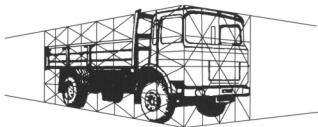


图 3.22 货车的透视图起稿过程

综合所学透视图知识可知，物体透视图的表达效果，不仅与观察者和物体之间的位置有关，还与物体和画面之间的相对位置有关，所以，在绘制透视图前，应分析被描绘形体的特点，根据表达要求，选择透视图的类型。为使绘制的透视图形象而逼真地表达形体，获得预期的表现效果，在画透视图时，要处理好观察者、形体和画面三者之间的位置关系，这三者间的位置关系是以观察者的站点、视高以及形体与画面之间的相对位置体现出

来的。这些因素的处理是否得当,将会直接影响效果图的表达效果。

3.3 透视阴影

物体在光线照射下,受光部分明亮,背光部分阴暗,其阴暗部分称为“阴面”或“阴”。如果将物体放在一个平面上,那么,在光线照射下,物体在平面上必会产生影子,称为“落影”或“影”。“阴影”就是“阴”和“影”的合称。

如图 3.23 所示,圆柱体在 L 方向的平行光线照射下,顶圆和左半个圆柱体表面是受光部分,称为“阳面”;底圆和右半个圆柱体表面是背光部分,称为“阴面”。阳面和阴面的分界线称为“阴线”;平面 P 称为“承影面”,圆柱体在承影面上的影子称为落影,落影的轮廓线称为“影线”。从图 3.23 中可以看出,“阴”和“影”之间存在着对应关系,物体落影的轮廓线就是物体上阴线的落影。所以求作物体的落影,实际上就是求作物体上阴线的落影。

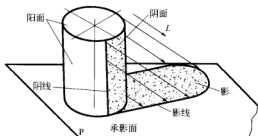


图 3.23 阴影的形成原理

3.3.1 光线的确定

在透视上加绘阴影,通常采用平行光线,光线照射方向可按透视图所表达物体的形状特征适当选择。根据平行光线与画面不同的相对位置可分为两种:一种是光线与画面平行,称为画面平行光线;另一种是光线与画面相交,称为画面相交光线。

(1) 画面平行光线

如图 3.24 所示,直线 AB 在平行于画面光线 L 照射下,光线的透视互相平行,所以没有灭点。由于光线的 H 面投影平行于 gg ,所以光线的基透视为水平方向。光线可以从左上方向右下方照射,也可以由右上方向左下方照射,倾角的大小可按需确定,为作图方便,常以 45° 倾角的光线作图。

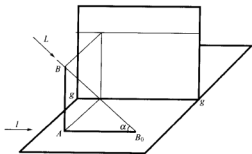


图 3.24 平行光线直线落影的形成

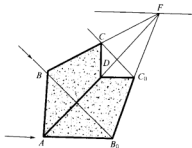


图 3.25 平行光线矩形落影的形成

如图 3.25 所示, 为已知矩形 $ABCD$ 的透视图, 用画面平行光线求作其落影。A 点在 H 面上, 落影与本身重合。过 B 点作光线 L 的透视 (45° 线), 过 A 点作光线的基透视 (水平线), 交点 B_0 即 B 点在 H 面上的落影, AB_0 即铅垂线 AB 的落影; CD 与 AB 平行, 其落影 C_0D 也是水平线。AD 在基面上, 其落影与本身重合, BC 与 AD 平行, 其落影 B_0C_0 与 BC 、 AD 都相交于同一个灭点 F 。

(2) 画面相交光线

如图 3.26 所示, 直线 AB 在与画面相交的平行光线照射下, 由于光线与画面相交, 所以光线的透视汇交于光线的灭点 F_L , 光线的基透视则汇交于视平线 hh 上的基灭点 F_1 , F_L 与 F_1 的连线应垂直于视平线。

如图 3.27 所示, 矩形 $ABCD$ 在与画面相交光线的方向为从左上角向右下角照射。光线的灭点 F_L 在矩形的左边, 在 gg 的下边。

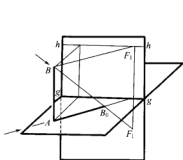


图 3.26 相交光线直线落影的形成

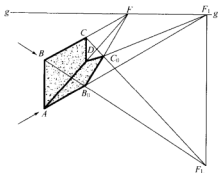


图 3.27 相交光线矩形落影的形成

AB 为铅垂线, 其基面上的落影, 应与光线的基透视方向一致。连接 AF_1 , 则 AB 的落影必在此连线上, 再由 B 点向 F_L 作透视, 与 AF_1 相交于 B_0 , AB_0 即 AB 的落影。同样方法作出 DC 的落影 DC_0 ; BC 和 AD 都是基面平行线, 它们在基面上的落影应与该直线本身平行, 所以连接 B_0C_0 , 其延长线必汇交于灭点 F 。

光线也可以从画面的后面向前照射, 如图 3.28 所示。光线的灭点 F_L 在视平线之上, 如图 3.29 所示。

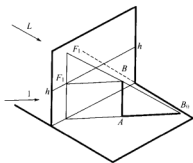


图 3.28 光线从画面后向前照射 (一)

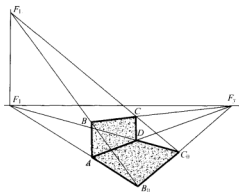


图 3.29 光线从画面后向前照射 (二)

3.3.2 透视阴影的基本作图

在透视图上加绘阴影的作图方法与在轴测图和正投影图上加绘阴影的作图方法基本相同,但是,在作图时,必须遵循透视投影的规律。

① 如图 3.30 所示,采用画面平行光线求作带斜面的立体在基面上的落影以及直线 AB 在立体上的落影。

CD 是铅垂线,其落影与光线次投影 1 一致,即为水平线,过 D 点作光线 L 的平行线得交点 D_0 。 CD_0 即 CD 的落影。同样方法作出 D_0E_0 、 E_0F_0 。过 F_0 作透视线消失于 F_v ,即完成立体阴影的作图。必须注意,影线 F_0E_0 的延长线必通过阴线 FE 在基面上的迹点 M ,所以也可以利用迹点求作倾斜线 EF 的落影。

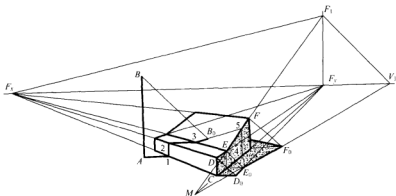


图 3.30 用画面平行光线求作立体及直线的落影

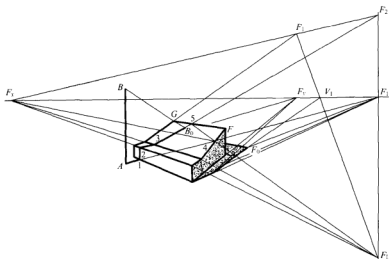


图 3.31 用画面相交光线求作立体及直线的落影

铅垂线 AB 在基面上的一段落影是水平线 $A1$,求作 AB 在立体上的落影,可包含 AB 做光截面,求出光截面与立体表面的交线 12、23 和 35,再过 B 点作光线与 35 交于 B_0 ,

则 $3B_0$ 就是 AB 在斜面上的一段落影。必须注意, 由于 $3B_0$ 在包含 AB 的光截面内, 光截面与画面平行, 则 $3B_0$ 与画面平行, 所以 $3B_0$ 无灭点, 必定与斜面的灭线 F_2F_1 互相平行。

② 如图 3.31 所示, 采用画面相交光线求作阴影。

直线 AB 在斜面上的落影可利用 AB 在基面上的虚影 (AF_1) 与 FG 在基面上落影的交点 4 作返回光线求得 5 点, 再过 B 点作光线与 35 交于 B_0 。必须注意, 在画面平行光线照射下, 交线 $3B_0$ 应平行于斜面的灭线 F_2F_1 , 但是在画面相交光线照射下, 交线 $3B_0$ 必定消失于斜面和光截面两平面的灭线的交点 F_2 。



图 3.32 建筑透视图和阴影的体现 (一)

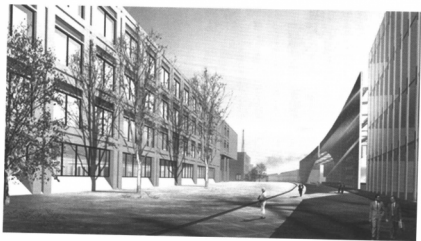


图 3.33 建筑透视图和阴影的体现 (二)

早在两万年以前的画上就有表现阳光和阴影的。从那以后,直到斜侧图和透视图出现以前很长时间里,几乎所有的艺术绘画都用阴影来描绘三维形体。阴影是制图与绘画中表现空间关系最好的方法之一。熟练运用好阴影的绘制对准确预现设计师的设计意图有很大的帮助。

图 3.32~图 3.35 所示是透视图运用阴影的实例。



图 3.34 建筑透视图和阴影的体现 (三)



图 3.35 工业产品透视图和阴影的体现

3.4 小结

① 透视遵循的规律是人眼睛的成像原理,其根据是空间物体的三维尺度,运用设计透视法则能准确预现设计师的设计意图。

② 透视图是以人的眼睛为中心的中心投影,其特点是近大远小,近宽远窄,作透视图实际上就是求作直线与平面的交点问题。

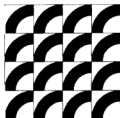
③ 透视图将设计意向转变成准确、逼真的三维空间图像而预现出来，是优秀设计的基础，设计师可根据这样直观的图像来推敲设计方案的优劣。

④ 透视图的简易画法有： 45° 倾角透视法， $30^\circ \sim 60^\circ$ 倾角透视法，平行透视法和倍增分割法等。

⑤ 透视阴影的基本作图与在轴测图和正投影图上加绘阴影的作图方法基本相同。但是，必须遵循透视投影的消失规律。

第4章

排列、组合、集合及其设计运用



- 排列、组合与集合
- 形态的各种组合与集合
- 形态在骨格中的组合与排列
- 小结

排列组合是一种重要的数学方法，也是组合设计的理论基础，组合设计是离散数学的一个重要分支，是一门研究按特定要求进行配置，按特定的规则进行处理，得到可以安排的方法和方案，并讨论其性质的学问。组合设计具有古老的历史渊源，但作为数学分支又相当年轻，是一个生机勃勃、广有前途的研究领域，既有很强的理论性，又有广泛的应用价值。该领域的许多问题最初只是一些智力游戏，对其研究也属于纯数学型，当生产和设计发展到一定程度，并应用到几何设计和平面设计后，研究工作有了强大的动力，取得了丰硕的成果，并且饶有趣味，引人入胜。

视觉语言可以析解为各项单独元素，设计元素不是各自孤立而是互相关联的，理念形态完全取决于设计元素的集合和集合方式。在设计中对两个或两个以上的基本形应用排列组合方法进行处理，将产生许多空间变化。形象可以在画面上下左右作位置变动或正负变化等，由此产生画面突破性的丰富变化。重复基本形或超基本形的集合，就依靠排列组合的相遇相叠的变化而绚丽多彩。

4.1 排列、组合与集合

4.1.1 排列

一般地，从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

根据排列的定义，两个排列相同，是指两个排列的元素完全相同，且元素的排列顺序也相同。例如， abc 与 abd 的元素不完全相同，则它们是不同的排列；又如 abc 与 acb ，虽然元素完全相同，但元素的排列顺序不同，它们也是不同的排列。

从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 来表示。

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) \quad (4.1)$$

这里 $n, m \in N$ ，并且 $m \leq n$ 。这个公式叫做排列数公式。其中，公式右边中第一个因

数是 n ，后面的每个因数都比它前面一个因数少 1，最后一个因数为 $n-m+1$ ，共有 m 个因数相乘。

n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个全排列。这时在排列数公式中， $m=n$ ，即有

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1 \quad (4.2)$$

就是说， n 个不同元素全部取出的排列数，等于正整数 1 到 n 的连乘积。正整数 1 到 n 的连乘积，叫做 n 的阶乘，用 $n!$ 表示。所以， n 个不同元素的全排列数公式可以写成

$$A_n^n = n! \quad (4.3)$$

4.1.2 组合

一般地，从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

从排列和组合的定义可以知道，排列与元素的顺序有关，而组合与顺序无关。如果两个组合中的元素完全相同，那么不管元素的顺序如何，都是相同的组合；只有当两个组合中的元素不完全相同时，才是不同的组合。例如， ab 与 ba 是两个不同的排列，但它们却是同一个组合。

从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示。例如，从 8 个不同元素中取出 5 个元素的组合数表示为 C_8^5 。

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \quad (4.4)$$

这里 $n, m \in N$ ，并且 $m \leq n$ 。这个公式叫做组合数公式。

上面的组合数公式还可以写成

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n-m)!} \quad (4.5)$$

一般地，从 n 个不同元素中取出 m 个元素后，剩下 $n-m$ 个元素。因为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的每一个组合，与剩下的 $n-m$ 个元素的每一个组合一一对应，所以从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，等于从这 n 个元素中取出 $n-m$ 个元素的组合数，即

$$\text{性质 1} \quad C_n^m = C_n^{n-m} \quad (4.6)$$

一般地，从 a_1, a_2, \dots, a_{n+1} 这 $n+1$ 个不同的元素中取出 m 个元素的组合数是 C_{n+1}^m ，这些组合可以分成两类：一类含有 a_1 ，一类不含 a_1 。含有 a_1 的组合是从 a_2, a_3, \dots, a_{n+1} 这 n 个元素中取出 $m-1$ 个元素与 a_1 组成的，共有 C_n^{m-1} 个；不含 a_1 的组合是从 a_2, a_3, \dots, a_{n+1} 这 n 个元素中取出 m 个元素组成的，共有 C_n^m 个。根据分类计数原理，得

$$\text{性质 2} \quad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \quad (4.7)$$

4.1.3 集合

数学中经常会用到具有某种特定性质的事物组成的集体，称这种集体为集合，简称集，通常用大写字母来表示集合。组成集合的各个事物称为这个集合的元素。如果集合 A 是由元素 e_1, e_2, \dots 组成的，那么，记作 $A = \{e_1, e_2, \dots\}$ 。如果 e 是集合 A 的一个元素，便记作 $e \in A$ ，读作“ e 属于 A ”。如果 e 不是集合 A 的一个元素，便记作 $e \notin A$ （或

$e \notin A$), 读作“ e 不属于 A ”。

在讨论集合时, 重复的元素只算一次。例如, 把 $\{1, 2, 2, 3\}$ 与 $\{1, 2, 3\}$ 看作是同一个集合。

如果一个集合中只有有限多个元素, 那么称这集合为有限集。如果一个集合中有无限多个元素, 那么称这集合为无限集。特殊地, 如果一个无限集中的诸元素能与全体自然数构成一一对应关系, 那么称这无限集为可数集或可列集。

例如, $\{1, 2, 3\}$ 是以三个数字 1, 2, 3 为元素的有限集, $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ 是以数字 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 为元素的可数集。全体实数组成一个无限集。区间 (a, b) 就是大于 a 、小于 b 的全体实数组成的集合, 它也是一个无限集。

4.1.3.1 子集

组成集合的元素不一定是数。例如, 平面上一个区域 D 中的全部点组成一个集合; 数轴上全部区间组成一个集合; 区间 (a, b) 上的全部连续函数组成一个集合等。

如果集合 A 与集合 B 是由同样的一些元素组成的, 则称 A 等于 B , 记作 $A=B$ 。如果属于集合 A 的任一元素都属于集合 B , 那么称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$) (图 4.1)。例如, 全体偶数组成的集合是全体整数组成的集合的子集, 区间 $(1, 2)$ 是区间 $(1, 4)$ 的子集。显然, 当 $A \subset B$ 且 $B \subset C$ 时, $A \subset C$ 。

为了以后讨论方便, 把不含任何元素的集合称为空集, 记作 V 。把空集 V 作为任一集合 A 的子集, 即 $V \subset A$ 。

显然, $A=B$ 等价于 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 。

4.1.3.2 并集

由属于集合 A 或属于集合 B 的全体元素组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$ 。图 4.2 中阴影部分表示 $A \cup B$ 。例如, 集合 $\{1, 2, 3\}$ 与集合 $\{3, 4, 5\}$ 的并集为集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; 区间 $(-\infty, 3)$ 与区间 $(-\infty, 1)$ 的并集为区间 $(-\infty, 3)$; 区间 $(1, 3)$ 与 $(2, 4)$ 的并集为区间 $(1, 4)$; 平面上坐标满足 $1 < x < 2$ 的点的全体组成的集合与坐标满足 $2 < y < 4$ 的点的全体组成的集合的并集为图 4.3 中阴影部分表示的集合 (边界不在内)。

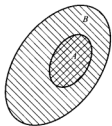


图 4.1 子集

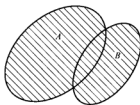


图 4.2 并集

4.1.3.3 交集

由既属于集合 A 又属于集合 B 的全体元素所组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$ 。图 4.4 中阴影部分表示 $A \cap B$ 。例如, 区间 $(-\infty, 3)$ 与区间 $(1, +\infty)$ 的交

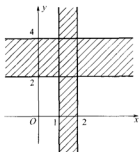
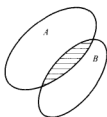
图 4.3 满足 x 和 y 的并集

图 4.4 交集

集为区间 $(1, 3)$ 。

如果 $A \cap B = \emptyset$, 即 A 、 B 无公共元素, 那么称 A 、 B 互不相交。例如, 全体正数组成的集合与全体负数组成的集合互不相交; 区间 $(1, 2)$ 与区间 $(2, 3)$ 互不相交。

集合的并及交满足下列分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (4.8)$$

下列各关系式是相互等价的

$$e \in (A \cup B) \cap C \quad (4.9)$$

$$e \in A \cup B \text{ 且 } e \in C \quad (4.10)$$

$$e \in A \cap C \text{ 或 } e \in B \cap C \quad (4.11)$$

$$e \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (4.12)$$

从而, 有上述分配律成立。

集合的并及交可以从两个集合推广到有限个或可数多个集合上去。各集合 A_1, A_2, \dots 的并集 $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ 就是由至少属于 A_1, A_2, \dots 中一个的元素的全体组成的集合; 各集合 A_1, A_2, \dots 的交集 $A_1 \cap A_2 \cap \dots$ 就是由同时属于 A_1, A_2, \dots 的元素的全体组成的集合。分配律对于有限个或可数多个集合的并集也成立, 即

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \cap C = (A_1 \cap C) \cup (A_2 \cap C) \cup \dots$$

4.1.3.4 差集

设 A 、 B 为任意两个集合, 所有属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合称为从 A 中去除 B 后的差集, 记作 $A - B$ 。图 4.5 中阴影部分表示差集 $A - B$ 。

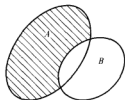


图 4.5 差集

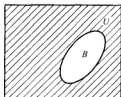


图 4.6 余集

4.1.3.5 余集

设 $B \subset U$, 称 $U - B$ 为 B 在 U 内的余集, 记作 \bar{B}_U 。图 4.6 中阴影部分表示 \bar{B}_U 。例

如, 当 U 为整个数轴时, 区间 $(-\infty, a)$ 在 U 内的余集为 $[a, +\infty)$ 。

下面提出几条关于余集的性质。设 A, B, \dots 都是 U 的子集, 为了简便起见, 略去表达余集时的下标 U

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (4.13)$$

$$\text{如果 } A \subset B, \text{ 那么 } \overline{A} \supset \overline{B} \quad (4.14)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (4.15)$$

4.2 形态的各种组合与集合

两种形态在配置构成中, 其要点是基于形态的组合与集合方法。形态组合和集合之间的关系有以下几种。

① 分离: 形象与形象之间存在着一定的空间 (图 4.7)。



图 4.7 形态之间的分离关系

② 连接: 形象的边沿恰好相接 (图 4.8)。



图 4.8 形态之间的连接关系

③ 复叠: 一个形象覆盖在另一个形象上, 能产生“上下”、“前后”的空间关系 (图 4.9)。



图 4.9 形态之间的复叠关系

④ 透叠: 透明的形象相互交叠, 既保持了原来的形象轮廓, 又丰富了再造形态的视觉效果 (图 4.10)。

⑤ 结合: 两个形象结合成新的形态 (图 4.11)。

⑥ 差叠: 两形象交叠后, 只保留下交叠的部分, 缩小了原来形象的视觉空间 (图 4.12)。



图 4.10 形态之间的透叠关系



图 4.11 形态之间的结合关系



图 4.12 形态之间的差叠关系

⑦ 重合：两个完全相同的形象，重合在一起，成为一个形态（图 4.13）。



图 4.13 形态之间的重合关系

⑧ 相切（减切）：当一个形象与另一个形象交叠时，在交叠处，被某一形象切掉相交的部分，成为新的形态（图 4.14）。这时要注意是由 A 切 B，还是 B 切 A，其视觉效果是不同的。



图 4.14 形态之间相切的关系

⑨ 消失：当两个形象的色相、明度、纯度完全相同时，其形态就融合在视觉中了。如一个红色的图案放在同一颜色的背景中，这时，这个图案就完全融入背景，在视觉中消失。

以上是形象关系之间的组合类型,而且复叠、透叠、结合、重合和相切都属于形态间的重叠,只是在具体的表现方法上有不同取舍。

在上述形象关系的组合中,从设计的角度与数学有一些差异。但以数学的观点来看,一些类型属于组合的关系,一些类型属于集合的关系。如交集——差叠、并集——结合、差集——复叠、余集——相切。

4.3 形态在骨格中的组合与排列

骨格是造型中的一种设计形式,形态在骨格所构成的框架中进行组合和排列。它的功能作用是使形态有秩序地编排。经过各种不同的骨格编排,能构成各种不同的形态及画面

气氛。在骨格中的框架里,形象可以做不同的编排,进行构成设计。骨格的宽窄变动,同时也是骨格所构成的每个单位的空间变动,包括形态的位置、方向的变化,在单位骨格中所形成的相互关系,能够产生构成后的原有形态的变异,创造出形态关系的整体效果。

根据其性质与作用,骨格可分为规律性骨格、非规律性骨格;有作用性骨格、非作用性骨格四类。

① 规律性骨格:是以严谨的数列方式或几何关系构成的。如重复、渐变等框架所形成的构成形式,都是规律性骨格(图4.15)。

② 非规律性骨格:是较为自由的编排形式,其中包括规律性骨格的衍变构成,有着极大的“随意性”和自由性(图4.16)。

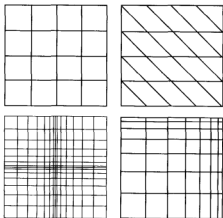


图 4.15 规律性骨格

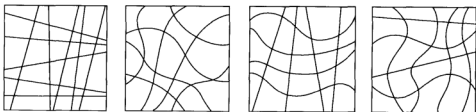


图 4.16 非规律性骨格

③ 有作用性骨格:所谓有作用性骨格,其作用就是能给以形象明确的空间。形象排列在由骨格线所组成的单位空间内,每一个单位空间为每个形象所独有,可以分离与其他空间的关系。在有作用性骨格的空间之内,形象可以自由地变化位置和方向(图4.17)。当形象大于骨格线的空间时,形象溢出骨格线的部分将沿着骨格线被切出(图4.18)。

在有作用性骨格中,骨格线的存在影响构成效果。具体设计时,可以全部保留骨格线,也可以不全部出现骨格线,允许出现变化,或使骨格线在使用时,时而有,时而无,形成图形的流动性(图4.19)。

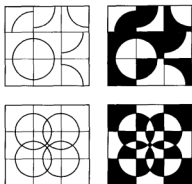


图 4.17 有作用性骨格

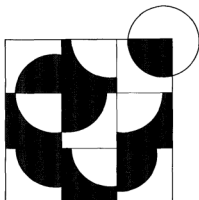


图 4.18 输出部分被切出

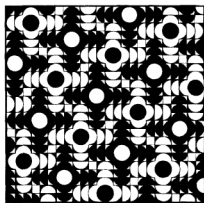


图 4.19 骨格的构成(汤洋)

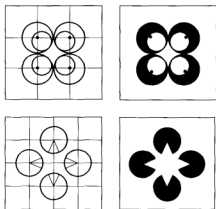


图 4.20 非作用性骨格

④ 非作用性骨格：所谓非作用性骨格，指在这种骨格中，骨格线仅引导形象的编排，而不影响形象空间的分割。所以，它的作用仅给予形象准确的位置。

形象占据骨格线的交点，它不决定形象所占的空间，也不决定形象的方向。但非作用性骨格对形象或背景同样产生影响（图 4.20）。

这里所讨论的骨格，是由严谨的数列方式或几何关系构成的规律性有作用性骨格以及在单位骨格中形态的组合与排列。因为从数学与设计角度来说，排列、组合和集合的意义是有差别的。从数学的角度看，图 4.21 中的图形，都可以认为是一个，只不过它们的方向发生了改变。但从设计的角度，当形态的方向发生变化，在视觉的感受上是不同的。所以可以认为是不同的形态，但它们是相互关联的。把每一种变化看成一个设计元素，如 A、B、C、D（图 4.21），加上这个设计元素的正负变化：E、F、G、H（图 4.22），就会有各种排列、组合，形成丰富的变化。就是说，形态从正负、方向、位置等方面进行变化都行。应该注意到这些元素都是由某一变化衍生的，它们之间具备有机的联系。在构成中这就叫基本形。如果每个元素没有任何关联，而是独立的，被称作单独形，过多使用单独形，则会使画面杂乱。

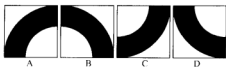


图 4.21 形态的正变化



图 4.22 形态的负变化

所以设计中,要达成和谐的美,形与形之间要有某种联系;而且必须是有规律的排列。若杂乱无章的组合与排列则不能充分体现美感。比较图 4.23 与图 4.24 就能看出这种差别。当然在图 4.23 中,形态是有关联的,虽然排列零乱,还是比全部使用单独形来得愉悦。



图 4.23 骨格的构成(一)(范振男)



图 4.24 骨格的构成(二)(范振男)

由关联元素排列、组合图形:A、A 排列(图 4.25);AB、AB 排列(图 4.26);ABC、ABC 排列(图 4.27);ABCD、ABCD 排列(图 4.28)。

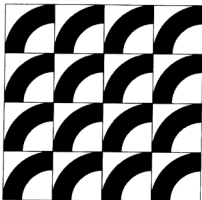


图 4.25 形态 A 的组合排列

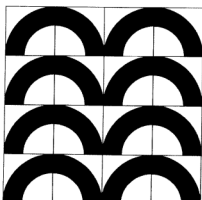


图 4.26 形态 AB 的组合排列

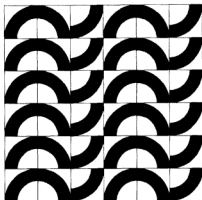


图 4.27 形态 ABC 的组合排列

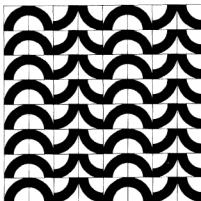


图 4.28 形态 ABCD 的组合排列

对于图 4.25、图 4.29~图 4.31，在数学中，可以认为是一种排列。正如前面已经提到，在设计中，只要元素的方向、色彩等发生了变化，在视觉感受中就有不同的感觉，则被认为是不同的排列。图 4.32 所示就是形态的明暗（在设计构成中，称为正负形）发生了变化。是 AE、AE 排列。比较图 4.25 与图 4.32，它们的视觉感受是不同的。

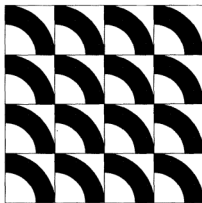


图 4.29 形态 B 的组合排列

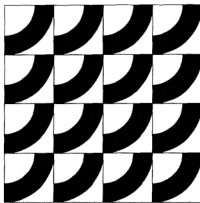


图 4.30 形态 C 的组合排列

图 4.33~图 4.40 所示是组合排列构图。

比较图 4.24 与图 4.37 的异同。在图 4.24 中，图形有三组图形的正负变化；而图 4.37 只有一组图形的正负变化。

通过上述图例，可以看到，形态的正负、方向变化，在构图时其位置按照某种规律的有序组合排列，造就了万千的变化。若打破形态的规律排列，在某一个地方或局部，造成突然的变化，就会形成特异的构图（图 4.39，图 4.40）。而在图 4.39 中，图形经过排列组合后，自然在中心位置上出现了变化，形成了特异结构；若利用形态的渐变，会出现间隔疏密或者形态大小的对比构图；利用排列方式的变化，如旋转排列，因为形态的差异，会形成辐射或集中的构图等。总之，形态在排列、组合时，通过其正负（主要指单位骨格

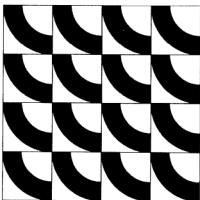


图 4.31 形态 D 的组合排列

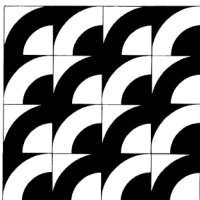


图 4.32 形态 AE (A 的正负) 组合排列

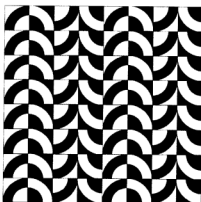


图 4.33 组合排列构图 (一) (袁涛)

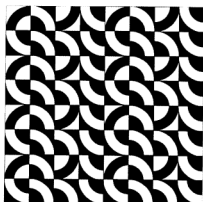


图 4.34 组合排列构图 (二) (袁涛)

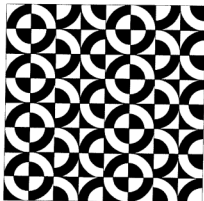


图 4.35 组合排列构图 (三) (袁涛)

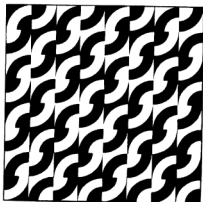


图 4.36 组合排列构图 (四) (范振男)

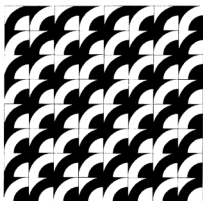


图 4.37 组合排列构图 (五) (袁涛)

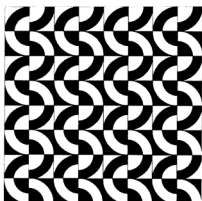


图 4.38 组合排列构图 (六) (袁涛)

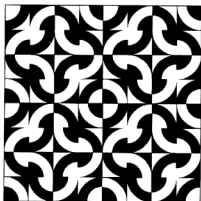


图 4.39 组合排列构图 (七) (袁涛)

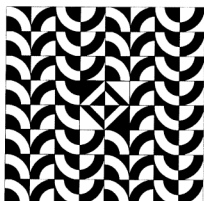


图 4.40 组合排列构图 (八) (袁涛)

中的形态)和方向的变化、位置的变动(任何单一的形态,都可以利用这种方法进行构图),变化是无穷无尽的。

4.4 小结

① 组合分析是研究安排对象的各种不同可能性,概率统计中的排列组合与设计数学中的组合设计在研究内容上各有侧重点。

② 形与形之间有一定的联系,单形所表达的语意是比较简单的,丰富形的表达语言必须进行形的组合,经过有规律的排列组合,能够达到和谐美。

③ 设计中的集合,由于形态的不同,形成了并(结合、连接、重合)、交(差叠)等不同的形式,产生不同的视觉感受。

④ 形态的各种组合可以形成复叠、透叠、差叠、连接、减切、重合、分离、结合等各种不同的关系,往往产生超人意料之外的美感。

⑤ 图形设计中,设计师针对设计元素有目的性地进行设计变动,进行有序的排列组合处理,将使设计呈多元化的形态和万千的丰富变化。

第二部分 高等设计数学

恩格斯指出：“初等数学，即常数的数学，至少就总体说来，是在形式逻辑的范围内活动的，而变数的数学——其中最重要的部分是微积分——按其本质来说不是别的，而是辩证法在数学方面的运用。”

高等数学与初等数学的基本区别不仅在于研究的对象——后者主要是常量与固定的图形，而前者则是变量和变化的图形，而且在方法上也有根本性的区别。初等数学的方法一般说来是静止的、孤立的，而高等数学则是动态的、联系的，因而也是辩证的。世界本来是在永恒变化中，所以只有从世界变化特性中去认识它、分析它，才能对它获得更深刻的了解。

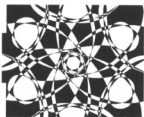
近百年来，由于生产技术的进步，社会需要的变化，设计师和艺术家纷纷探索和研究各类不规则现象。云彩不是球体，山脉不是圆锥，海岸也不是折线，闪电的路径、人体的造型以及星系复杂的漩涡状态等奇形怪状，麻点斑痕，还有破碎断裂，扭曲缠绕，参差不齐，纠缠不清，这些不规则图形是不能用传统的欧氏几何来准确描述的，这些设计图形与以往的数学规律有着原则性的区别，要解决这些问题，初等数学显然不够用，需要全新的观念和方法，这就促进了全新的数学工具和数学语言的产生和发展，这就促进了需要的数学有了一个飞跃——从初等设计数学到高等设计数学。

高等设计数学的方法和初等设计数学的方法有根本不同，要求在变化的过程中掌握变量的实质。这样，既可以洞察过程的全貌，又能够作极其精细的分析，并研究在某一点极其微小的附近变量变化的情况。

应用高等设计数学的设计作品可以有美丽的几何形状、精致的图案结构、协调的视觉色彩，这一切在应用初等设计数学的传统设计中很少能够体验到，因而高等设计数学广泛应用于现代设计的各个领域。

第5章

函数与函数图形



- 函数
- 函数图形
- 函数图形应用
- 小结

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是数学分析研究的对象。函数概念的出现，是人类思维从静态飞跃到动态的必然。当人类试图描述一个运动和变化的世界时，导入并应用自变量和因变量的函数观念是极为自然和必要的。从此以后，在设计应用中，也不再局限于常量和固定的图形，而开始采用变量和变化的图形。

应用高等设计数学进行设计，设计师不仅要了解函数，更重要的是熟悉函数图形。笛卡儿坐标使数与形有机结合起来。一个函数性质可以通过其图形得到启发或表达，一个复杂图形可用函数精确或近似地加以描述，互相利用，彼此促进，可以解决许多理论和实际问题，也可以做好传统设计难以办到的事。函数图形本身就很美，体现了数学美的对称、和谐、抽象、简洁、精确、统一、奇异、突变。同时也具有特殊的有价值的艺术美，是形成其他一些常见的漂亮图案的基石，也是许多艺术家设计作品的主要几何元素。应用函数图形，不仅可以直接设计出函数字母、函数建筑、函数花卉、函数人像，在此基础上也能创作出许多优秀的艺术作品。

5.1 函数

5.1.1 函数的概念

设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y ，如果对于 x 的每一个值， y 都有惟一的值与它对应，那么就说 x 是自变量， y 是 x 的函数^①。

将自变量 x 取值的集合叫做函数的定义域，和自变量 x 的值对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域。

$$y = f(x) \quad (5.1)$$

其中 $x \in A$ ， $y \in B$ 。原象的集合 A 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域，象的集合 $C (C \subseteq B)$ 叫

① 函数 (function) 一词，是德国数学家莱布尼兹 (1646~1716 年) 在 1692 年首先采用的。在我国，函数一词是清代数学家李善兰 (1811~1882 年) 最初使用的，他在 1859 年与英国学者伟烈亚力 (1815~1887 年) 合译的《代数学》一书中，将 “function” 译作 “函数”。

做函数 $y=f(x)$ 的值域。函数符号 $y=f(x)$ 表示 y 是 x 的函数，有时简记作函数 $f(x)$ 。

在研究函数时，除用符号 $f(x)$ 表示外，还常用 $g(x)$, $F(x)$, $G(x)$ 等符号来表示。

5.1.2 函数的表示法

表示函数的方法，常用的有解析法、列表法、图形法三种。

(1) 解析法

就是把两个变量的函数关系，用一个等式来表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式。

例如 $y = \sqrt{x-2} \quad (x \geq 2)$

就是用解析式表示函数关系的。

用解析式表示函数关系的优点是：函数关系清楚，容易从自变量的值求出其对应的函数值，便于用解析式来研究函数的性质。

(2) 列表法

就是列出表格来表示两个变量的函数关系。

例如，数学用表中的平方表、平方根表、三角函数表以及银行里常用的“利息表”等都是用列表法来表示函数关系的。

用列表法表示函数关系的优点是：不必通过计算就知道当自变量取某些值时函数的对应值。

(3) 图形法

就是用函数图形表示两个变量之间的关系。

例如，气象台应用自动记录器，描绘温度随时间变化的曲线就是用图形法表示函数关系的。

用图形法表示函数关系的优点是：能直观形象地表示出函数的变化情况。

5.1.3 函数的性质

5.1.3.1 函数的单调性

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ：

如果对于属于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就称 $y=f(x)$ 在这个区间上是增函数 [图 5.1 (a)]；

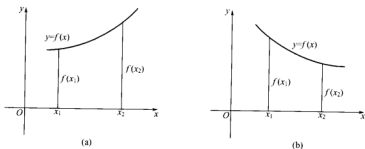


图 5.1 函数的增减

如果对于属于定义域 I 内某个区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就称 $y=f(x)$ 在这个区间上是减函数 [图 5.1 (b)]。

函数是增函数还是减函数, 是对定义域内某个区间而言的。有的函数在一些区间上是增函数, 而在另一些区间上不是增函数。

如果函数 $f(x)$ 在某个区间是增函数或减函数, 那么就称函数 $f(x)$ 在这一区间具有 (严格的) 单调性, 这一区间叫做 $y=f(x)$ 的单调区间。在单调区间上增函数的图形是上升的, 减函数的图形是下降的。

5.1.3.2 函数的奇偶性

一般地, 如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x)=f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数。

一般地, 如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x)=-f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数。

如果函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数, 那么称函数 $f(x)$ 具有奇偶性。

一般地, 奇函数的图形关于原点对称, 反过来, 如果一个函数的图形关于原点对称, 那么这个函数是奇函数。

偶函数的图形关于 y 轴对称, 反过来, 如果一个函数的图形关于 y 轴对称, 那么这个函数是偶函数。

利用这个结论, 可以简化函数图形的画法。

【例 1】 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 它在 y 轴右边的图形如图 5.2 (a) 所示, 画出函数 $f(x)$ 在 y 轴左边的图形。

解 因为偶函数的图形关于 y 轴成轴对称图形, 所以画法如下。

① 如图 5.2 (b), 在 y 轴右边的图形上取几个点。例如取点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (这些点一般应该包括图形的最低点、最高点等)。

② 画出这些点关于 y 轴的对称点。例如点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 的对称点分别为 $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5$ [图 5.2 (c)]。

③ 用一条平滑曲线把图 5.2 (c) 中画出的点连接起来。例如用平滑曲线连接点 $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5$ 后, 就得到函数 $f(x)$ 在 y 轴左边的图形 [图 5.2 (c)]。

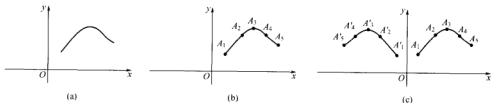


图 5.2 利用偶函数的对称性作图

5.1.3.3 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 如果存在正数 M , 使得与任一 $x \in X$ 所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 内有界, 或称 $f(x)$ 在 X 内是有界函数。

5.1.3.4 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的数 a , 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm a) \in D$, 且下式恒成立

$$f(x+a)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, a 为周期。如图 5.3 所示为 $y=\sin x$ 的图形。

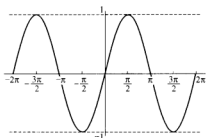


图 5.3 $y=\sin x$ 图形 (一)

由定义可知, 如果 $f(x+a)=f(x)$, 则有

$$f(x+2a)=f[(x+a)+a]=f(x+a)=f(x)$$

所以 $2a$ 也是周期, 同理 $3a, 4a, \dots$ 都是周期。通常所说的周期是指最小的正周期。

三角函数都是周期函数。

5.1.4 反函数

5.1.4.1 反函数的概念

一般地, 函数 $y=f(x)(x \in A)$ 中, 设它的值为 C , 根据这个函数中 x, y 的关系, 用 y 把 x 表示出, 得到 $x=\varphi(y)$ 。如果对于 y 在 C 中的任何一个值, 通过 $x=\varphi(y)$, x 在 A 中都有唯一的值和它对应, 那么, $x=\varphi(y)$ 就表示 y 是自变量, x 是自变量 y 的函数。这样的函数 $x=\varphi(y)(y \in C)$ 叫做函数 $y=f(x)(x \in A)$ 的反函数, 记作

$$x=f^{-1}(y) \quad (5.2)$$

在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中, y 是自变量, x 表示函数。但在习惯上, 一般用 x 表示自变量, 用 y 表示函数, 为此常常对调函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x, y , 把它改写成 $y=f^{-1}(x)$ (今后凡不特别说明, 函数 $y=f(x)$ 的反函数都采用这种经过改写的形式)。

从反函数的概念可知, 如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$, 那么函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数就是 $y=f(x)$, 这就是说, 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数。

函数 $y=f(x)$ 的定义域, 正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域; 函数 $y=f(x)$ 的值域, 正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域 (见表 5.1)。

表 5.1 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的定义域与值域

项 目	函数 $y=f(x)$	反函数 $y=f^{-1}(x)$
定义域	A	C
值 域	C	A

5.1.4.2 互为反函数的函数图形间的关系

如果函数 $y=f(x)(x \in A)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$, 那么在直角坐标系 xOy 中, 函

数 $y=f(x)$ 的图形和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 (图 5.4)。

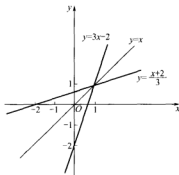


图 5.4 函数 $y=3x-2$ ($x \in \mathbb{R}$) 和它的反函数 $y=\frac{x+2}{3}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的图形

5.2 函数图形

一些函数本身就有颇具造型特点的图形。在这一节中, 将了解一些函数的相关图形, 设想它们在造型设计中的作用。

5.2.1 极坐标与参数方程

5.2.1.1 极坐标

(1) 极坐标的概念

用两个数确定平面上一点位置的方法, 除了前面所使用的直角坐标法以外, 常用的还有极坐标法。在某些场合, 使用极坐标能使问题更便于研究。

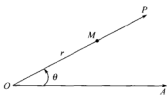


图 5.5 极坐标中点的表示方法

在平面上取一点 O , 成为极点, 并自 O 点引一射线 OA , 称为极轴 (图 5.5)。平面上任意一点 M (不在极点) 的位置, 可以由两个数 $r=|OM|$ 及 $\theta=\angle AOM$ 来决定, 其中 θ 就是射线 OP 绕 O 点由 OA 位置按逆时针方向旋转, 第一次转到 OM 位置时所转过的角; r 是射线 OP 上由 O 到 M 的距离。这样两个数 r 、 θ 成为点 M 的极坐标, 并以记号 $M(r, \theta)$ 来表示点, r 称为极径, θ 称为极角。

根据上述定义, 点 M 的极坐标 r 、 θ 的数值各自受到以下的限制: $r>0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ 。在这样的限制下, 任意给定一对数 r 、 θ , 平面上就对应着惟一的一点 M ; 反之, 平面上除极点 O 以外的任意一点 M , 必有一对数 r 、 θ 与它对应。当点 M 为极点时, $r=0$, 而 θ 的值可任意。

在极坐标的实际应用中, 为了方便起见, 往往取消上述对 r 和 θ 的限制, 而规定它们可取任何实数值, 现设有任意实数 r 和 θ , 首先, 作射线 OP 使以 OA 为始线, OP 为终线的角 $\angle AOP=\theta$ 。其次, 如果 r 是正的, 在 OP 上作一点 M , 使 $r=|OM|$; 如果 r 是负的, 在 P 向 O 的延长线作一点 M , 使 $|r|=|OM|$ 。这样, 对于任意的一对实数 r 和 θ , 总可以在平面上确定惟一的一点 M 。但是反过来, 对平面上的同一点却对应着无限多对的数值。因为如果 $r=r_1$, $\theta=\theta_1$ 是平面上某一点 M 的极坐标, 则 $r=r_1$, $\theta=\theta_1+2\pi k$ 也是点 M 的极坐标; 此外, $r=-r_1$, $\theta=\theta_1+\pi+2\pi k$ 也是点 M 的极坐标 (k 是任何整数)。

【例 2】描出下列各点：

$$M_1(8, \frac{\pi}{3}), M_2(-8, \frac{\pi}{3}), M_3(8, -\frac{\pi}{3}), M_4(-8, -\frac{\pi}{3}), M_5(8, \frac{4\pi}{3}), M_6(8, \frac{301\pi}{3}), M_7(8, -\frac{301\pi}{3}).$$

解 描点如图 5.6 所示。

(2) 极坐标与直角坐标的关系

有时为了研究问题方便起见，需要把极坐标变换成直角坐标，或者需要把直角坐标变换成极坐标，因此，需要研究这两种坐标之间的关系。

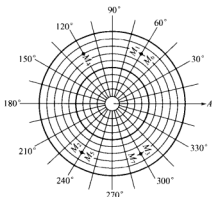


图 5.6 描点图形

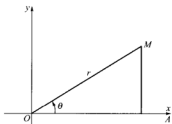


图 5.7 极坐标与直角坐标的变换

设平面上有一直角坐标系和一极坐标系，它们是这样取定的：极点和坐标原点重合，极轴和 x 轴的正半轴重合。设平面上任意一点 M 在直角坐标系中的坐标为 (x, y) ，在极坐标系中的坐标为 (r, θ) 。现在要来研究 (x, y) 和 (r, θ) 之间的关系（图 5.7）。如果点 M 的极坐标 (r, θ) 已知，则它的直角坐标可用下列变换公式求得

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad (5.3)$$

如果点 M 的直角坐标 x, y 已知，则它的极坐标可用下列变换公式求得

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.4)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (5.5)$$

(3) 曲线的极坐标方程

像直角坐标系中曲线可用含有变量 x, y 的方程表示一样；在极坐标系中曲线也可用含有变量 r, θ 的方程来表示。

例如中心在极点 O ，半径为 a 的圆的极坐标方程为 $r = a$ 。

(4) 圆锥曲线的极坐标方程

以点 F 为极点，以 F 到 g 的垂线作极轴，垂足 D 到 F 的方向为极轴的正向（图 5.8）。在这个极坐标系中来建立圆锥曲线的极坐标方程。

设 $M(r, \theta)$ 为圆锥曲线上任意一点。限制 $r > 0$ ，则根据圆锥曲线的定义有

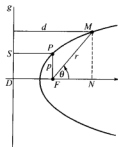


图 5.8 圆锥曲线的极坐标方程

$$\frac{r}{d} = e \quad (5.6)$$

其中 r 为极径, 同时亦为点 M 到焦点 F 的距离, d 为点 M 到准线 g 的距离, e 为离心率。

设 P 是圆锥曲线上这样的一点, FP 垂直于极轴, 且 P 在极轴的上方 (由对称性可知这极轴同时就是焦点轴), 则 $p = FP$ 称为圆锥曲线的焦点参数。

$$\text{因} \quad d = DN = DF + FN = DF + r \cos \theta$$

$$\text{又} \quad DF = SP, \text{而} \frac{FP}{SP} = \frac{p}{r} = e$$

$$\text{因此} \quad d = \frac{p}{e} + r \cos \theta$$

将 d 代入式 (5.6) 得

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (5.7)$$

式 (5.7) 就是所要推导的圆锥曲线的极坐标方程, e 为离心率。当 $e < 1$ 时得椭圆, 当 $e = 1$ 时得抛物线, 当 $e > 1$ 时得双曲线 (严格说来, 在 $r > 0$ 的限制下, 应该是双曲线的一个右分支)。

$$r = \frac{-p}{1 + e \cos \theta} \quad (5.8)$$

式 (5.8) 就是双曲线的左分支的极坐标方程。

p 是圆锥曲线的焦点参数。在抛物线的情形, p 等于焦点与准线间的距离。在椭圆的情形, 若椭圆的长半轴为 a , 短半轴为 b , 则 $p = \frac{b^2}{a}$ 。事实上, 因点 $P(c, p)$ 在曲线上,

所以要满足方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 由此求得

$$p^2 = b^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = \frac{b^2 (a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}$$

因此

$$p = \frac{b^2}{a}$$

在双曲线的情形, 若双曲线的实半轴为 a , 虚半轴为 b , 则用同样的方法求得 $p = \frac{b^2}{a}$ 。

5.2.1.2 参数方程

(1) 参数方程的概念

一般来说, 如果把平面曲线 C 上的点的流动坐标 x 与 y 分别用另一个变数 t 的函数

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (5.9)$$

来表示, 使点 (x, y) 随着变数 t 在某一范围内变化而描述出曲线 C , 且只描出 C , 那么方程 (5.9) 就称为平面曲线 C 的参数方程, 变数 t 称为参数。

这里要注意, 参数方程 (5.9) 的参数 t 并不一定代表时间, 而可以代表其他的任何意义, 如角度、有向线段的值等。

曲线的参数方程有以下两个特点:

由参数方程表示的曲线具有一定的方向;

一条曲线可以用不同的参数方程来表示。

(2) 曲线的参数方程

直线 L 的参数方程 (图 5.9)

$$\begin{cases} x = x_0 + \mu \cos \alpha \\ y = y_0 + \mu \sin \alpha \end{cases}$$

其中参数 μ 表示有向线段 $\overline{M_0 M}$ 的值。

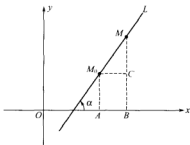


图 5.9 直线 L 的参数方程示意图

椭圆的参数方程

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

其中参数 t 称为椭圆的离心角。

摆线的参数方程

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

摆线由无限多支彼此一样的分支组成，每一支称为摆线的一拱。一拱之间为 $2\pi a$ ，而高为 $2a$ ，其中 a 为滚动着的圆的半径 (图 5.10)。

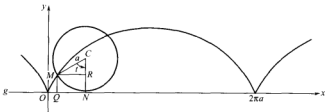


图 5.10 摆线参数方程示意图

圆的渐伸线的参数方程

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

圆的渐伸线参数方程如图 5.11 所示。

(3) 参数方程的作图法

要描出一参数方程的图形，可先假定参数等于某些适当的实数值，将这些实数值逐一代入参数方程中，求得 x 和 y 的对应值。由同一个参数值所算出的 x 值和 y 值是曲线上一点的坐标。将这些点在平面上描下来。通过这些点连成曲线。这曲线即参数方程的图形。

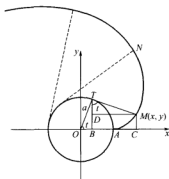


图 5.11 圆的渐伸线参数方程示意图

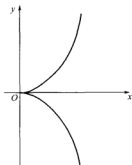


图 5.12 半立方抛物线

【例 3】描出参数方程 $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ 的图形。

解

t	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
x	...	9	4	1	0	1	4	9	...
y	...	-27	-8	-1	0	1	8	27	...

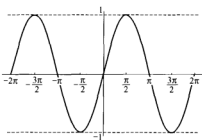
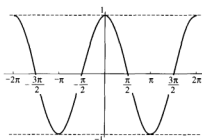
曲线的形状如图 5.12 所示, 该曲线称为半立方抛物线, 因为将参数方程中的 t 消去后得

$$y = \pm x^{\frac{3}{2}}$$

5.2.2 三角函数图形

① $y = \sin x$, 如图 5.13 所示。

② $y = \cos x$, 如图 5.14 所示。

图 5.13 $y = \sin x$ 图形 (二)图 5.14 $y = \cos x$ 图形

③ $y = \tan x$, 如图 5.15 所示。

④ $y = \cot x$, 如图 5.16 所示。

⑤ $y = \sec x$, 如图 5.17 所示。

⑥ $y = \csc x$, 如图 5.18 所示。

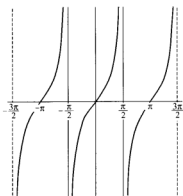


图 5.15 $y = \tan x$ 图形

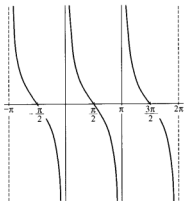


图 5.16 $y = \cot x$ 图形

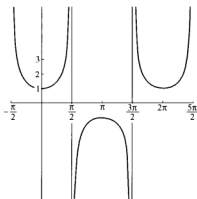


图 5.17 $y = \sec x$ 图形

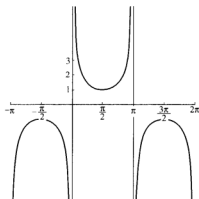


图 5.18 $y = \csc x$ 图形

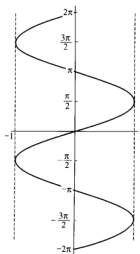


图 5.19 $y = \arcsin x$ 图形

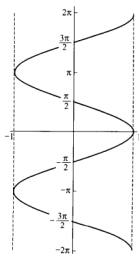
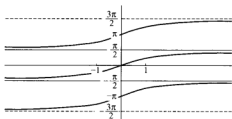
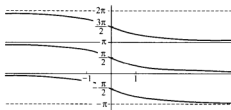


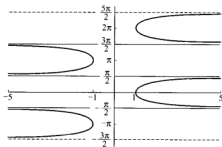
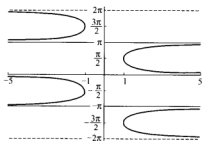
图 5.20 $y = \arccos x$ 图形

5.2.3 反三角函数图形

- ① $y = \arcsin x$, 如图 5.19 所示。
 ② $y = \arccos x$, 如图 5.20 所示。
 ③ $y = \arctan x$, 如图 5.21 所示。
 ④ $y = \operatorname{arccot} x$, 如图 5.22 所示。

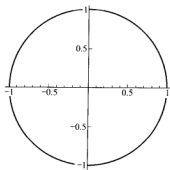
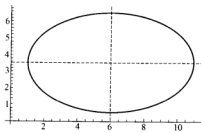
图 5.21 $y = \arctan x$ 图形图 5.22 $y = \operatorname{arccot} x$ 图形

- ⑤ $y = \operatorname{arcsec} x$, 如图 5.23 所示。
 ⑥ $y = \operatorname{arccsc} x$, 如图 5.24 所示。

图 5.23 $y = \operatorname{arcsec} x$ 图形图 5.24 $y = \operatorname{arccsc} x$ 图形

5.2.4 基本函数图形

- ① 圆 $x^2 + y^2 = R^2$, 如图 5.25 所示。
 ② 椭圆 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, 如图 5.26 所示。

图 5.25 $x^2 + y^2 = R^2$ 图形图 5.26 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 图形

③ 双曲线 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, 如图 5.27 所示。

④ 抛物线 ($p > 0$)

$(y-k)^2 = 2p(x-h)$, 如图 5.28 所示。

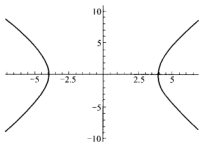


图 5.27 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 图形

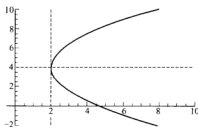


图 5.28 $(y-k)^2 = 2p(x-h)$ 图形

$(y-k)^2 = -2p(x-h)$, 如图 5.29 所示。

$(x-h)^2 = 2p(y-k)$, 如图 5.30 所示。

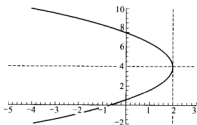


图 5.29 $(y-k)^2 = -2p(x-h)$ 图形

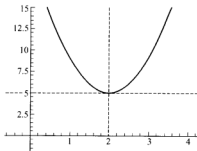


图 5.30 $(x-h)^2 = 2p(y-k)$ 图形

$(x-h)^2 = -2p(y-k)$, 如图 5.31 所示。

⑤ 抛物拱形 (跨度为 $2a$, 高为 h) $x^2 = \frac{a^2}{h}(h-y)$, 如图 5.32 所示。

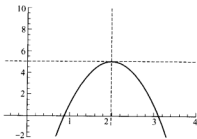


图 5.31 $(x-h)^2 = -2p(y-k)$ 图形

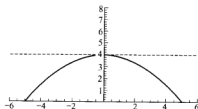


图 5.32 $x^2 = \frac{a^2}{h}(h-y)$ 图形

⑥ 幂函数 $y = x^n$ (n 为实数), 如图 5.33 和图 5.34 所示。

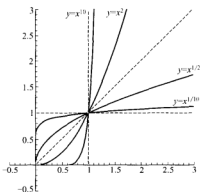


图 5.33 $y=x^n (n=2, 1/2, 10, 1/10)$ 图形

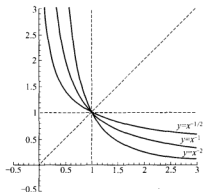


图 5.34 $y=x^n (n=-1, -2, -1/2)$ 图形

⑦ 指数函数 $y=a^x (a>0, a\neq 1)$, $-\infty < x < +\infty$, 如图 5.35 和图 5.36 所示。

⑧ 对数函数 $\log_a x (a>0, a\neq 1)$, $0 < x < +\infty$, 如图 5.37 和图 5.38 所示。

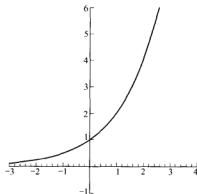


图 5.35 $y=a^x (a>1)$ 图形

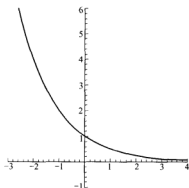


图 5.36 $y=a^x (0<a<1)$ 图形

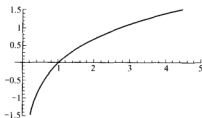


图 5.37 $\log_a x (a>1)$ 图形

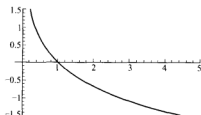


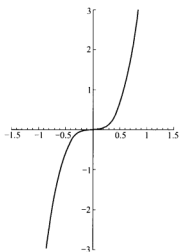
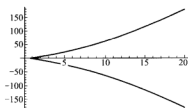
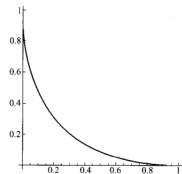
图 5.38 $\log_a x (0<a<1)$ 图形

5.2.5 特殊曲线图形

① 立方抛物线 $y=ax^3$, 如图 5.39 所示。

② 半立方抛物线 $y^2=ax^3$, 如图 5.40 所示。

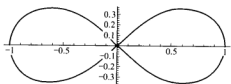
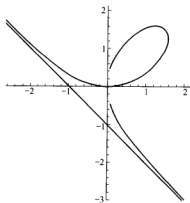
③ 抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 或 $\begin{cases} x=a\sin^2 t \\ y=a\cos^2 t \end{cases}$, 如图 5.41 所示。

图 5.39 $y = ax^3$ 图形图 5.40 $y^3 = ax^3$ 图形图 5.41 $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ 图形

④ 其舌线 $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ 或 $\begin{cases} x = 2a \tan \theta \\ y = 2a \cos^2 \theta \end{cases}$, 如图 5.42 所示。

⑤ 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ 或 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$, 如图 5.43 所示。

⑥ 叶形线 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 或 $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$, 如图 5.44 所示。

图 5.42 $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ 图形图 5.43 $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ 图形图 5.44 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 图形

⑦ 蔓叶线 $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$, 如图 5.45 所示。

⑧ 环索线 $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$, 如图 5.46 所示。

⑨ 摆线 $x = a \cos^{-1} (1 - \frac{y}{a}) - \sqrt{2ay - y^2}$ 或 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 如图 5.47 所示。

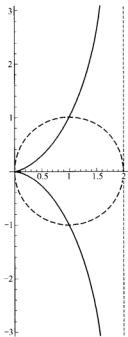


图 5.45 $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ 图形

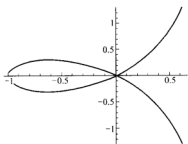


图 5.46 $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$ 图形

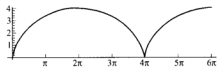


图 5.47 $x = a \cos^{-1} (1 - \frac{y}{a}) - \sqrt{2ay - y^2}$ 图形

⑩ 内摆线 $\begin{cases} x = (a-b) \cos t + b \cos \frac{a-b}{b} t \\ y = (a-b) \sin t - b \sin \frac{a-b}{b} t \end{cases}$, 如图 5.48 所示。

⑪ 外摆线 $\begin{cases} x = (a+b) \cos t - b \cos \frac{a+b}{b} t \\ y = (a+b) \sin t - b \sin \frac{a+b}{b} t \end{cases}$, 如图 5.49 所示。

⑫ 心脏线 $x^2 + y^2 + ax = a \sqrt{x^2 + y^2}$ 或 $\rho = a(1 - \cos \theta)$, 如图 5.50 所示。

⑬ 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 或 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$, 如图 5.51 所示。

⑭ 圆的渐开线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ 或 $\phi - \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a} + \cos^{-1} \frac{a}{\rho} = 2k\pi$ (k 为整数), 如

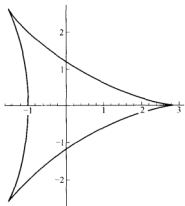


图 5.48 内摆线

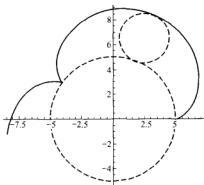


图 5.49 外摆线

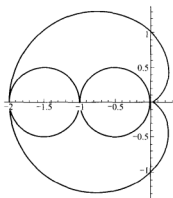
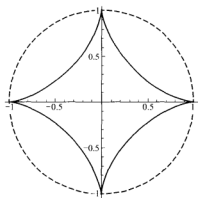
图 5.50 $x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$ 图形图 5.51 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 图形

图 5.52 所示。

⑮ 曳物线 $x = a \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \mu \sqrt{a^2 - y^2}$ 或 $\begin{cases} x = t - a \operatorname{th} \frac{t}{a} \\ y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a} \end{cases}$, 如图 5.53 所示。

⑯ 阿基米德螺线 $\rho = a\theta$, 如图 5.54 所示。

⑰ 等角螺线 (对数螺线) $\rho = e^{\theta}$, 如图 5.55 所示。

⑱ 三叶玫瑰线 $\rho = a \sin 3\theta$, 如图 5.56 所示。

⑲ 四叶玫瑰线 $\rho = a \sin 2\theta$, $\rho = a \cos 2\theta$, 如图 5.57 所示。

⑳ 心形线 $\rho = a \sin \frac{\theta}{2}$, 如图 5.58 所示。

5.2.6 二次曲面图形

在实际工作中, 仅仅研究平面当然是很不够的, 常常还需要处理一些有关曲面的问题。例如光学镜头, 其表面一般是球面的一部分; 大型建筑中的圆柱, 其表面是圆柱面;

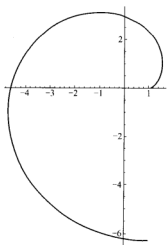


图 5.52 圆的渐开线

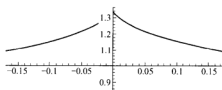


图 5.53 $x = a \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mu \sqrt{a^2 - y^2}$ 图形

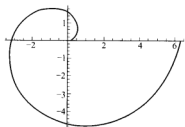


图 5.54 $p = a\theta$ 图形

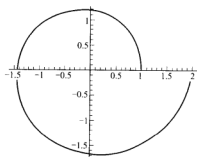


图 5.55 $p = e^\theta$ 图形

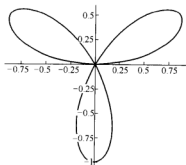
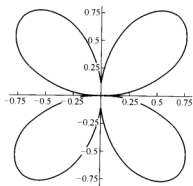
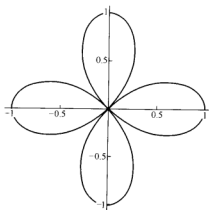


图 5.56 $p = a \sin 3\theta$ 图形



(a) $p = a \sin 2\theta$ 图形



(b) $p = a \cos 2\theta$ 图形

图 5.57 四叶玫瑰线

地球的表面,近似地是一个椭球面;探照灯的反射镜面,许多雷达的天线,是一个旋转抛物面等。

从平面解析几何中已经知道,在取定一个平面坐标系后,一个含有两个变量的方程 $f(x, y)=0$ 的图形一般说来是一条平面曲线。例如方程 $x^2+y^2=1$, 表示以原点为圆心的圆。这就是说,一条平面曲线可用一个二元方程来表示;一个二元方程的图形一般是一条平面曲线。

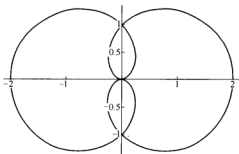


图 5.58 $\rho = a \sin \frac{\theta}{2}$ 图形

在空间中一个平面用一个三元一次方程

来表示;反过来,一个三元一次方程的图形是一个平面。在一般情况下,坐标满足一个三元方程 $F(x, y, z)=0$ 的那些点形成一个曲面,这就是方程 $F(x, y, z)=0$ 的图形。反过来,假定给了一个曲面,取定一个坐标系,当一个点在曲面上的时候,它的坐标 (x, y, z) 不能是任意的,而要满足一定的条件,这个条件一般地可以写成一个方程 $F(x, y, z)=0$,叫做曲面的一般方程。这就是说,曲面上点的坐标,一定满足这个方程,满足这个方程的点一定在曲面上。

在建立了方程和图形的关系之后,可以利用几何直观去讨论方程的一些问题,反过来,也可以利用代数方法去得到几何图形的性质。

最简单的曲面当然是平面,它可以用一个三元一次方程来表示,所以平面也叫做一次曲面。一个三元二次方程所表示的曲面叫做二次曲面。本节仅限于介绍二次曲面。用几何特征来刻画这些曲面是比较复杂的。但是适当地选取坐标系,它们的方程可以化成很简单的形式,叫做它们的标准方程。下面就从它们的标准方程来讨论它们的图形。

(1) 球面

与空间中一个固定点 O 的距离等于一个常数 R 的点,其全体构成空间中一个球面。 O 点称为球心, R 称为球半径。以 O 点为坐标原点建立一个直角坐标系,在此坐标系下,球面上坐标为 (x, y, z) 的点到坐标原点的距离为 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$, 两边平方得

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

这就是球面的方程。

(2) 椭球面

把球面

$$x'^2+y'^2+z'^2=a^2$$

沿着两个垂直的方向,例如 y 轴和 z 轴压缩一下,使坐标 y 和 z 分别按比例 $\frac{b}{a}$ 和 $\frac{c}{a}$ 来改变,即 (x', y', z') 变成 (x, y, z) , 其中 $x=x'$, $y=\frac{b}{a}y'$, $z=\frac{c}{a}z'$, 或 $x'=x$, $y'=\frac{a}{b}y$, $z'=\frac{a}{c}z$, 代入球面方程就得到

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2+\frac{a^2}{c^2}z^2=a^2$$

或

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

这个方程所表示的曲面叫椭球面 (图 5.59)。这个方程叫做椭球面的标准方程, 其中 a , b , c 都是正数。

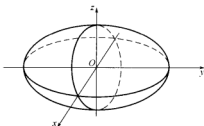


图 5.59 椭球面

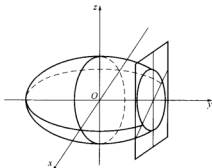


图 5.60 平行截面法示意

(3) 平行截面法

给了空间曲面的一个方程, 常常是很难立即想像出它的形状。为了能看出曲面的大体形状, 用一组或几组与坐标平面平行的平面去截曲面, 所得的交线称为截痕, 或平行截痕。如果各平行截痕的形状清楚了, 便可看出曲面的大致形状。这种通过分析平行截痕去了解曲面形状的方法称为平行截面法。以椭球为例。用平行于 xz 平面的平面去截椭球 (图 5.60)。这个平面的方程是 $y=h$ ($0 < h < b$)。截痕上的点, 其坐标满足方程

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = h \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{h}{b}\right)^2 \\ y = h \end{cases}$$

当 $h < b$ 时, 它表示平面 $y=h$ 内的一个椭圆。

由此可看出, 用平行于坐标平面的平面去截, 相当于在方程中分别令 x , y , z 中之一为常数, 从而得出截痕方程。

(4) 椭圆抛物面

由方程

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

确定的曲面称为椭圆抛物面。可以采用平行截面法来认识它的形状。

用平行于 xy 平面的平面 $z=h$ 去截曲面, 截线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h^2 \\ z = h \end{cases}$$

当 $h=0$ 时它是一个点; $h<0$ 时无意义; $h>0$ 时它是一个个逐渐增大的椭圆 (图 5.61)。

令 $x=0$ 和 $y=0$, 得到 yz 平面和 xz 平面上的两条截线方程

$$\begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

这是两条抛物线 (图 5.62)。

把上述两方面综合起来, 就可以大致想像出椭圆抛物面的形状了 (参阅图 5.61)。椭圆抛物面可以看作是由一个椭圆的变动产生的, 这个椭圆的两对顶点分别在那两条抛物线上运动, 椭圆所在的平面垂直于 z 轴。

椭圆抛物面对称于 xz 平面和 yz 平面, 因而也对称于 z 轴, 但它没有对称中心。

在椭圆抛物面的方程中, 如果 $a=b$, 方程化作

$$z = \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2)$$

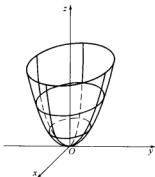


图 5.61 椭圆抛物面

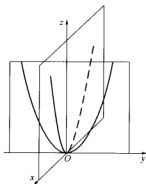


图 5.62 两条抛物线

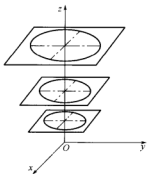


图 5.63 截面图形圆

用平面 $z=h$ 截它, 得到截面图形是一个圆 (参阅图 5.63)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ha^2 \\ z = h \end{cases}$$

即截线上各点与 z 轴距离都相等。这时曲面可以看作是 yz 平面上的图形绕 z 轴旋转一周而得。 yz 平面上的图形 (即令 $x=0$) 为抛物线 $z = \frac{1}{a^2}y^2$, 所以曲面是由 yz 平面上一条抛物线绕 z 轴旋转而成。由于这个原因, 称它为旋转抛物面。探照灯的反射镜面, 就是一个旋转抛物面; 许多雷达的天线, 也做成旋转抛物面的形状。

(5) 单叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所确定的曲面叫做单叶双曲面。为了弄清单叶双曲面的形状, 用平行截面法来研究它被坐标平面及其平行平面所截得的截线。

用平行于 xy 平面的平面 $z=h$ 去截它, 截线总是一个椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$

它的顶点分别在 xz 平面和 yz 平面上。但是，曲面分别在这两个坐标平面上的截线却是双曲线（见图 5.64）

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

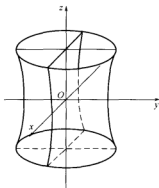


图 5.64 单叶双曲面

于是，单叶双曲面可以看作是由一个椭圆的变动产生的，这个椭圆的两对顶点分别在上述两条双曲线上运动，椭圆所在的平面总垂直于 z 轴。

单叶双曲面对称于每个坐标平面以及每个坐标轴和原点。这从图上或从方程中不难看出。

(6) 双叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

所确定的曲面叫双叶双曲面。

这个曲面和 xz 平面不相交，因为若 $y=0$ ，则得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

x 和 z 取任何实数都不能满足此方程。

用 xz 的平行平面 $y=h$ 去截，当 $|h|>b$ 时，截线总是一个椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{b^2} - 1 \\ y = h \end{cases}$$

它的两对顶点分别在 xy 平面和 yz 平面上。但是，曲面分别在这两个坐标平面上的截线却是双曲线

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

于是, 双叶双曲面也可看作是由一个椭圆的变动产生的, 这个椭圆的顶点分别在上述两条双曲线上运动, 椭圆所在的平面总垂直于 y 轴 (图 5.65)。

双叶双曲面对称于各坐标平面以及各坐标轴及原点。

(7) 双曲抛物面

方程

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

所确定的曲面叫做双曲抛物面。

用平行于 xy 平面的平面 $z=h$ 去截它, 截线方程是

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h \\ z = h \end{cases}$$

只要 $h \neq 0$, 它总是双曲线, 并且, 当 $h > 0$ 时, 双曲线的实轴平行于 x 轴; 当 $h < 0$ 时, 双曲线的实轴平行于 y 轴; 当 $h = 0$ 时, 截线变成

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

或写成

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

这在 xy 平面上是一对相交的直线 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ 和 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ 。曲面被 xy 平面分割为上、下两部分, 上部沿着 x 轴的两个方向上升, 下部沿着 y 轴的两个方向下降。这个曲面的形状比较复杂, 它的大体形状是马鞍形, 所以也叫马鞍面 (图 5.66)。

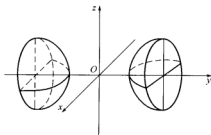


图 5.65 双叶双曲面

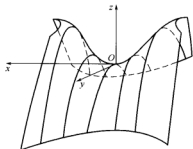


图 5.66 马鞍面

要进一步明确它的结构, 来观察它在与 yz 平面平行的平面 $x=k$ 上的截线

$$\begin{cases} y^2 = -b^2 \left(z - \frac{k^2}{a^2} \right) \\ x = k \end{cases}$$

这是一条抛物线, 顶点在 xz 平面上, 开口向着 z 轴的负方向。当 $k=0$ 时, 这条抛物线就

变成

$$\begin{cases} y^2 = -b^2 z \\ x = 0 \end{cases}$$

这是曲面在 yz 平面上的截线。曲面在 xz 平面上的截线也是一条抛物线

$$\begin{cases} x^2 = a^2 z \\ y = 0 \end{cases}$$

它开口的方向是 z 轴的正方向。所以双曲抛物面可以看作是由一条抛物线的平行移动产生的，这条抛物线的顶点在另一条抛物线上，但开口方向相反。

这个曲面对称于 xz 平面和 yz 平面，因而也对称于 z 轴。

(8) 二次柱面

设一方程中不包含 z ，如

$$F(x, y) = 0$$

在 xy 平面上，这方程表示一条曲线 L ， L 上点的坐标满足这方程。不过还要看到，这方程也为空间的其他一些点的坐标所满足，只要这些点的坐标 x 和 y 分别与曲线 L 上的坐标相等即可，而坐标 z 却可以任意变化。也就是，空间这些点在 xy 平面上的投影正好落在曲线 L 上。这些空间点的全体是一曲面，它是由平行于 z 轴的直线沿曲线 L 移动作成的，这个曲面叫做柱面。曲线 L 叫做准线。平行于 z 轴而沿 L 移动的直线叫做母线。因此， $F(x, y) = 0$ 在空间表示柱面，它的母线平行于 z 轴（图 5.67）。

同理， $F(y, z) = 0$ 及 $F(x, z) = 0$ 在空间都表示柱面，它们的母线分别平行于 x 轴及 y 轴。

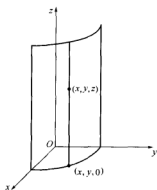


图 5.67 柱面

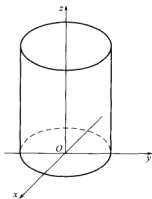


图 5.68 圆柱面

以二次曲线为准线的柱面叫做二次柱面。在 xy 平面上，每一条二次曲线都在空间确定一个柱面。例如：

圆柱面方程（图 5.68）

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

椭圆柱面方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

双曲柱面方程（图 5.69）

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

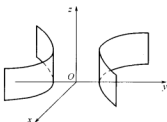


图 5.69 双曲柱面

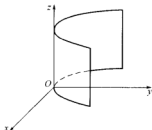


图 5.70 抛物柱面

抛物柱面方程 (图 5.70) $x^2 - 2py = 0$

(9) 二次锥面

由一族经过一定点的直线形成的曲面叫做锥面。这些直线叫做它的母线，那个定点叫做它的顶点。如果已经知道了顶点，要确定锥面，只需在每条母线上再知道一个点就行了。把在锥面上与各母线都相交但不经过顶点的一条曲线叫做它的一条准线。因此，把准线的各点与顶点用直线连接起来就得到锥面。一般地，常取锥面在一个平面上的截线作准线 (图 5.71)。

从锥面的定义可看出，顶点与曲面上任意点的连线全在曲面上。如果顶点在原点，那么顶点 $(0, 0, 0)$ 与一点 (x, y, z) 的连线上的点就是 (tx, ty, tz) ，其中 t 是任意实数。因此，对于顶点在原点的锥面，其方程的特征是：如果 (x, y, z) 满足方程，那么对于任意实数 t ， (tx, ty, tz) 也满足方程。

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

所确定的曲面是二次锥面。

显然，原点在曲面上。若 (x, y, z) 在曲面上，则 (tx, ty, tz) 也在曲面上，因为

$$\frac{(tx)^2}{a^2} + \frac{(ty)^2}{b^2} - \frac{(tz)^2}{c^2} = t^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) = 0$$

要确定这个锥面只要给出一条准线就行了。用平面 $z=c$ 去截它，就得到一条准线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = c \end{cases}$$

这显然是 $z=c$ 平面上的一个椭圆。当 $a=b$ 时，它是 $z=c$ 平面上的一个圆，这时曲面叫做圆锥面 (图 5.72)。

(10) 二次曲面小结

带有三个变量的二次方程具有形式

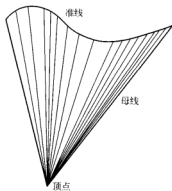


图 5.71 二次锥面

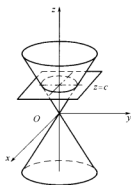


图 5.72 圆锥面

$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$
共包含 10 项。

可以证明, 经过适当的变换, 上面的方程可化为下列 17 种标准形式之一:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	椭球面
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	虚椭球面
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	单叶双曲面
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	双叶双曲面
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	二次锥面
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	虚二次锥面
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0$	椭圆抛物面
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0$	双曲抛物面
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	椭圆柱面
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	虚椭圆柱面
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	一对虚的相交平面
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	双曲柱面
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	一对相交平面
$y^2 - 2px = 0$	抛物柱面

$$x^2 - a^2 = 0$$

一对平行平面

$$x^2 + a^2 = 0$$

一对虚平行平面

$$x^2 = 0$$

一对重合平面

5.3 函数图形应用

函数图形本身就具有一定的美感,同时它又是最严谨的科学,可以用函数公式进行精确描述。科学和艺术是一对孪生兄弟。数学中蕴涵着无穷的美感——抽象的美,而图形又把这种美具象地表现了出来。数学图形可以成为艺术创作的源泉,在这里不能不想到荷兰版画艺术家埃舍尔(Escher)。他把科学和艺术完美地结合到一起,形成了自己独一无二的艺术风格。他虽然不是数学家,但却用数学图形进行创作。图 5.73 所示是根据数学图形创作而成的圆的极限。

虽然设计区别于纯艺术,但设计同样可以利用数学图形进行。在设计基础平面构成中,数学函数图形大有用武之地。在平面构成中一般采取几何元素来设计,而函数图形无疑给平面构成提供了设计的素材。同时,设计者可合理地应用黄金比例和各种数列进行分割构图,培养自己的设计思维能力,并有目的地应用到设计中。

比如上述的螺旋线、双纽线、三叶线等本身就是很美的图形。还可以进行再设计,在设计构成中同样遵循基本的构成形式。比如重复的构成形式、渐变的构成形式和发射的构成形式,图 5.74 就是以双纽线为基础,通过参数的修改变形形成一系列图形,然后进行重复叠加,最后形成一个简单的线构成,而这一过程都是在数学软件中完成的。

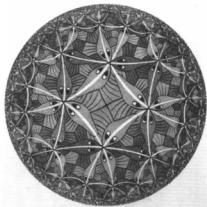


图 5.73 圆的极限 (Escher)

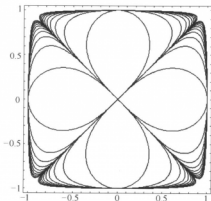


图 5.74 双纽线叠加 (李响)

简单的函数图形对于深入研究图案设计十分重要。设计师通过掌握必要的数学理论知识和一些基本的数学软件可以较好地把握数理美应用到设计中(图 5.75)。尤其在平面构图中,大量优美的数学曲线可直接调用。如图 5.76 中的发射构成,由数学函数的四叶玫瑰线缩放而成,缩放遵循了斐波那契数列的变化规律,所以整体视觉感极为舒服,富有韵律美。图 5.77 是等角螺旋线(对数螺旋线)图形,由两条方向相反的螺旋线构成,同样极富美感,若进行间隔填充,即可构成设计图案。

可以看到在数学软件中的构成比较单一,视觉冲击比较弱。在利用函数图形进行构成

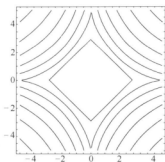


图 5.75 数学曲线在图案中的应用

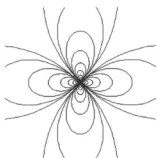


图 5.76 四叶玫瑰线

中当然没必要局限在数学软件中，可以充分利用平面设计软件进行快捷的设计，提高其效率和精确度。平面软件一般采用的是 CorelDRAW、Illustrator 等矢量绘图模式的软件，这在图形变形、缩放、镂空等方面都比较方便且不会变形。同时在设计的过程中，比如渐变构成和发射构成就可以根据黄金比、等比数列、费波那契数列进行变化处理，在设计构成的过程中合理应用数理比例，会给图形带来更大的视觉冲击力和视觉美感。图 5.78～图 5.106 就是利用上述的函数图形结合平面软件进行的构图，供设计者参考。



图 5.77 等角螺旋线

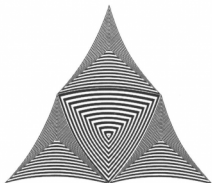


图 5.78 环索线所作的构图 (李响)

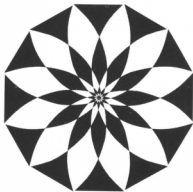


图 5.79 内摆线所作的构图 (一) (李响)



图 5.80 星形线所作的构图 (一) (李响)

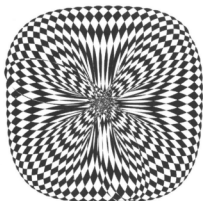


图 5.81 三叶玫瑰线所作的构图 (李响)



图 5.82 双组线所作的构图 (李响)



图 5.83 三叶玫瑰线变换 (一) (苟双晓)

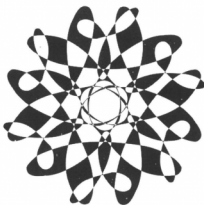


图 5.84 三叶玫瑰线变换 (二) (苟双晓)

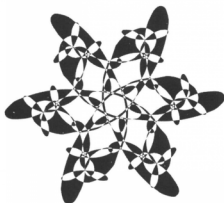


图 5.85 三叶玫瑰线变换 (三) (苟双晓)

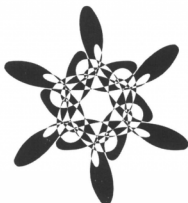


图 5.86 三叶玫瑰线变换 (四) (苟双晓)

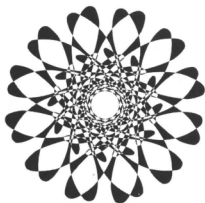


图 5.87 三叶玫瑰线变换 (五) (苟双晓)



图 5.88 三叶玫瑰线变换 (六) (苟双晓)



图 5.89 三叶玫瑰线变换 (七) (苟双晓)



图 5.90 三叶玫瑰线变换 (八) (苟双晓)



图 5.91 三叶玫瑰线变换 (九) (苟双晓)

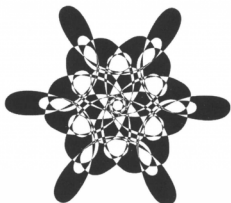


图 5.92 三叶玫瑰线变换 (十) (苟双晓)

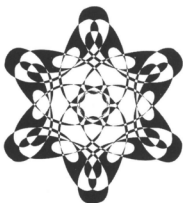


图 5.93 三叶玫瑰线变换 (十一) (荷双晓)

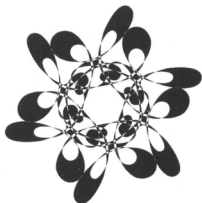


图 5.94 三叶玫瑰线变换 (十二) (荷双晓)



图 5.95 三叶玫瑰线变换 (十三) (荷双晓)

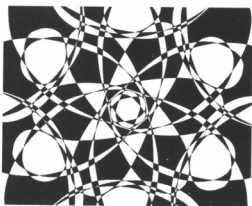


图 5.96 三叶玫瑰线变换 (十四) (荷双晓)

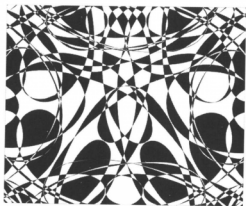


图 5.97 三叶玫瑰线变换 (十五) (荷双晓)



图 5.98 心形线所作的构图 (李彦艳)

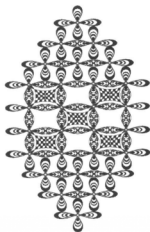


图 5.99 函数之花系列所作的构图 (李彦艳)

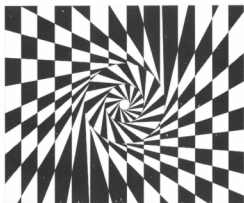


图 5.100 圆与切线所作的构图 (李彦艳)

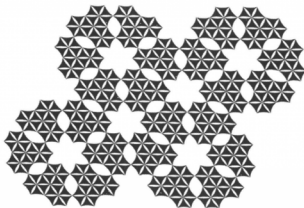


图 5.101 内摆线所作的构图 (二) (李彦艳)

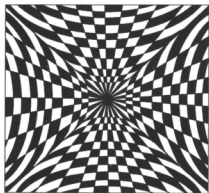


图 5.102 星形线所作的构图 (二) (李彦艳)

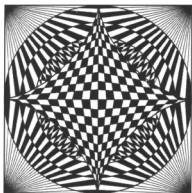


图 5.103 星形线和圆所作的构图 (李彦艳)

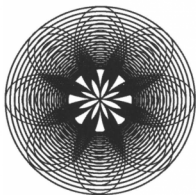


图 5.104 四叶玫瑰变形 (杜娜)



图 5.105 三叶玫瑰制作标志 (杜娜)



图 5.106 三叶玫瑰线变形 (杜娜)

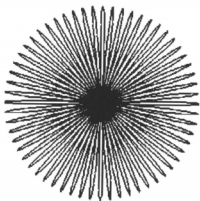


图 5.107 光

在绘制图形时，经常用到笛卡儿坐标系，但它并不是惟一选择。还可以使用球坐标，柱形坐标，极坐标等坐标系。下面就在极坐标内绘制图形（图 5.107~图 5.111），来说明在极坐标内作图的便利性。

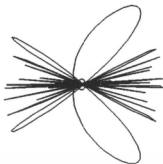


图 5.108 蝶一（荷双晓）

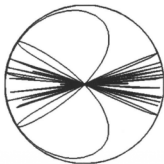


图 5.109 结（荷双晓）

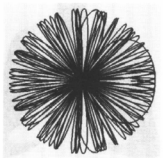


图 5.110 菊（荷双晓）

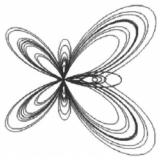


图 5.111 蝶二（荷双晓）

上面这些图形看起来较复杂，其实它们的源程序较为简单，但是在笛卡儿坐标系内这些图形却难以生成。这些复杂而又奇妙的图形之间，有的不过是改变了一个小小的参数，或是正、余弦函数位置的变换。

图 5.112 是用一个等轴螺旋线加以重复、排列、相减（重叠部分）等变化而成的构成

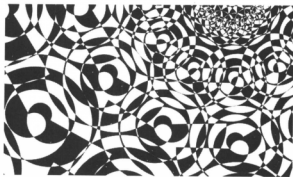


图 5.112 星河灿烂（荷双晓）

图形。

5.4 小结

① 函数通常被解释成一个变量依赖于另一个变量，但是，函数概念的本质并不是量之间的依赖性，而是对应关系本身，包括数与形之间的关系。

② 函数的表示方法有解析法、列表法和图形法等多种，其中函数图形是函数的主要表示方法，也是设计的重要几何元素。

③ 函数具有的形态包括单调性、奇偶性、周期性和有界性，有时还有对称性，是函数图形形式美的数学基础和数理内涵。

④ 设计中常用的函数图形有基本初等函数图形、特殊曲线图形和二次曲面图形，这些图形虽然比较简单，但可以体现数学自身的数学美和艺术美。

⑤ 同一函数图形的运动以及不同函数的组合可以形成许多美丽的图案，设计师利用函数特征可以构成优美的图案。在设计中，稍加改变和复合，就能创造出变化万千的优秀作品。

第6章

微积分及其应用



- 导数及其应用
- 微分、微分方程及其图形特征
- 积分及其应用
- 小结

从数学发展历史来看,微积分的产生和应用标志着从初等数学到高等数学的飞跃,函数是高等数学的中心概念之一,而微积分是研究函数的特殊领域,微分与积分从不同的方向研究函数的形态,提供了研究函数图形的几何形态的方法及由函数的一些属性确定函数关系和函数图形的方法。

导数与微分是微分学的主要概念。微分学的对象是函数。使用方法是极限值的研究和计算。函数的导数与微分分别是函数图形及其切线对于自变量变化所引起的反应的一种敏感性度量。许多几何图形问题,诸如曲线的切线、斜率,或曲线的曲率计算,描述变化率的概念都可借助微分学来解决。不定积分与定积分是积分学的主要概念,积分学的研究对象是有关封闭边界曲线或曲面所围区域的面积或体积问题的整体知识。系统的微积分才能给出几何学和科学中产生的直觉概念所需要的精确的数学描述,微积分的概念打开了数学知识和真理的巨大宝库之门。设计师将在学习和设计中逐渐发现其各种重要应用和巨大威力,并帮助设计师理解设计图形的变化性质,从而能够理性地开展设计。

6.1 导数及其应用

6.1.1 导数的定义

定义:设函数 $y=f(x)$, 对应自变量的任一改变量 Δx , 函数的改变量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 。此时,如果极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在,那么极限值就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数,记为 $f'(x_0)$ (或 y' , 或 $\frac{dy}{dx}$, 或 $\frac{df}{dx}$), 此时说 $f(x)$ 在点 x_0 导数存在,或者说 $f(x)$ 在点 x_0 可导。

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数正好等于其图形上点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。因此,如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

图 6.1 所示为导数的几何意义。

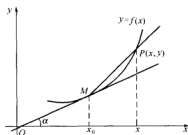


图 6.1 导数的几何意义

6.1.2 简单函数的导数

① 常数的导数为 0: $y=c$, $y'=0$.

② $y=x^a$ (a 为任意不为零的实数)

当 $x \neq 0$ 时, $y'=(x^a)'=ax^{a-1}$; 当 $x=0$ 时, $f'(0)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{a-1}$.

因此, 当 $a>1$ 时, $f'(0)=0$, 上述公式 $y'=ax^{a-1}$ 也适用。

当 $a=1$ 时, $(\Delta x)^{a-1}=1$, 所以 $f'(0)=1$ 上述公式也适用。

而当 $a<1$ 时, 极限为 ∞ , 因此当 $a<1$ 时, 函数在 $x=0$ 这一点不可导。

特别地, 若 $y=x^n$ (n 为自然数), 则 $y'=nx^{n-1}$ 。

若 $y=\sqrt{x}$, 则 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} (x>0)$ 。

若 $y=\frac{1}{x}$, 则 $y'=-\frac{1}{x^2} (x \neq 0)$ 。

③ $y=\sin x$, 即得 $y'=(\sin x)'=\cos x$ 而 $(\cos x)'=-\sin x$ 。

④ $y=\log_a x (x>0)$, 即得 $y'=(\log_a x)'=\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$, 特别地, 若 $y=\ln x$, 则

$$y'=\frac{1}{x}。$$

6.1.3 求导法则

① 若 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在, 则有

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

就是说两个可导函数之和 (差) 的导数等于它们导数之和 (差)。

② 若 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在, 则有 $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 。

③ 若 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在, 且 $g(x) \neq 0$, 则有 $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ 。

④ 复合函数的导数

若 $y=f(u)$ 在点 u 可导, $u=g(x)$ 在点 x 可导, 则复合函数 $y=f(g(x))$ 在点 x 可导, 且有关式 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 。

⑤ 反函数的导数

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 导数存在且不等于 0, 且 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内连续, 且严格

单调, 则其反函数 $x=\psi(y)$ 在点 y_0 可导, 这里 $y_0=f(x_0)$ 且有 $\psi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ 。

6.1.4 导数的应用

6.1.4.1 函数的上升、下降与极值的判断

(1) 函数的上升与下降

导数是关于自变量的变化率, 有了导数就可以直接判断在某范围内的函数的变化情况。函数的上升与下降就是函数的变化趋势, 在图形中很容易观察到, 图 6.2 为关于 $\log_a x (a>1, 0<a<1)$ 的图形。当 $a>1$ 时, 图形在区间 $(0, +\infty)$ 上升, 函数随变量 x 的增加而增加, $\log_a x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 就是单调递增函数。数学表达如下: 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有 $x_1 < x_2$, 且 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 是单调递增函数, 即函数图形呈上升状。当 $0 < a < 1$ 时, 函数图形呈下降趋势, 函数值随着变量 x 的增加而减少, 所以 $\log_a x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 是单调递减函数。数学表达如下: 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有 $x_1 < x_2$, 且 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 是单调递减函数, 即函数图形是下降的。

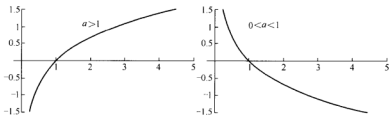


图 6.2 函数 $\log_a x$ 的上升与下降

通过函数的导数可以判断函数的上升与下降即单调性。若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续, $f'(x)$ 在区间 (a, b) 存在且不变号。那么 $f'(x) > 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 严格上升, 当 $f'(x) < 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 严格下降。

根据上述方法讨论函数 $y=3x-x^3$ 的上升与下降情况。

$y'=3-3x^2=3(1-x^2)=3(1+x)(1-x)$, 于是在 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$ 。从而函数是上升的。则函数在 $[1, +\infty)$ 及 $(-\infty, -1]$ 中为下降的, 而在 $(-1, 1)$ 中函数是上升的。如图 6.3 所示, 可进行直观判断。

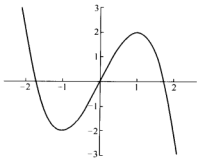


图 6.3 函数 $y=3x-x^3$ 的上升与下降

(2) 极值

极值包括极大值与极小值。在一定范围内当变量取某个值时结果最大, 就是极大值; 若结果最小, 就是极小值。在设计过程中, 对极值的求解问题反映在耗费时间的极小值、耗费资金的极小值 (成本)、产品功能的极大值和获利极大值等方面。对蜂房结构的研究表明, 同样容积的建筑, 采用蜂房结构所用材料最省, 这同样反映了建筑设计中所碰到的极值问题。图形的变化往往以极值为关键点, 通过对极值问题的直观理解, 为解决某些复

杂的设计问题提供帮助。

函数极值的数学定义如下：假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是连续的。若对于一点 x_0 ，存在 x_0 的某一邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$)，使对于此邻域中的任意点 x ，都有 $f(x) \leq f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 有一极大值 $f(x_0)$ ， x_0 称为极大点，如图 6.4 所示， $f(x)$ 在 x_1, x_3 等点都有极大值；同样如果在 x_0 的某一邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 总有 $f(x) \geq f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 有一极小值 $f(x_0)$ ， x_0 称为极小点，图 6.4 中 $f(x)$ 在 x_2, x_4 等点都有极小值。极大值与极小值统称为极值。极大点与极小点统称为极值点。若以上不等式中等号不成立，则称为严格意义上的极值。

极值问题广泛应用于实际求解中，如在产品下料过程中怎样做到最省料，包装设计亦如此，极值问题关系到最优化的问题。通过如下实例加以说明。

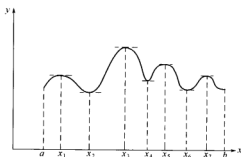


图 6.4 函数 $f(x)$ 的极值

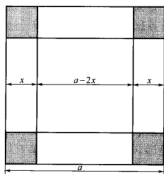


图 6.5 方匣的容积

【例 1】 设有一块边长为 a 的正方形铁皮，从其各角截去同样的小方块，做成一个无盖的方匣，问截去多少，方匣的容积最大？

解 如图 6.5 所示，设截去的小方块边长为 x ，则方匣的容积为

$$y = (a - 2x)^2 x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{a}{2} \right)$$

于是问题就归结为求函数 $y = (a - 2x)^2 x$ 在区间 $\left[0, \frac{a}{2} \right]$ 中的最大值。

因为 $y' = (a - 2x)(a - 6x)$ 。当 $x = \frac{a}{6}$ 时 $y' = 0$ ；而在端点时， $y = 0$ ，所以截去以 $x = \frac{a}{6}$ 为边长的小方块时，匣子容积最大。

6.1.4.2 曲线的凹凸与拐点

(1) 曲线的凹凸

凹凸作为图形的基本特征，对于准确描绘函数图形起着重要作用。在设计构成中，线的凹凸程度直接影响到线的属性和表现张力。根据线的凹凸与否分为直线和曲线，曲线给人以优雅、跳跃、节奏感，直线则具有速度、简洁和锐利的特征。如图 6.6 所示，可见有必要对曲线的凹凸进行研究。

对于上升曲线，凹凸不同，会产生不同的效果。例如 $y = x^2$ 及 $y = x^{\frac{1}{2}}$ ，它们在

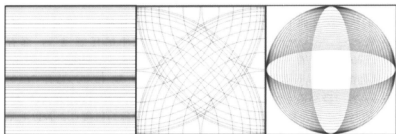


图 6.6 函数图形的凹凸表现

$[0, 1]$ 上都是上升的, 但图形却有不同的变化趋势 (图 6.7)。在 $y=x^2$ 的图形上任取两点, 连接这两点间的弦总位于这两点间的弧段的上方, 所以是凹的; 而在 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 上任取两点, 连接这两点间的弦总位于这两点间的弧段的下方, 所以是凸的。

凹凸的数学定义如下: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 如果对 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 , 恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 那么称 $f(x)$ 在 (a, b) 内的图形是 (向上) 凹的 (或凹弧); 如果恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 那么称 $f(x)$ 在 (a, b) 内的图形是 (向上) 凸的 (或凸弧)。如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且在 (a, b) 内的图形是凹 (或凸) 的, 那么称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹 (或凸) 的。

从几何上看, 若 $f(x)$ 在闭区间上是凸的, 那么连接曲线上任意两点 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ 间的弦的中点位于曲线上相应的点 (具有相同横坐标的点) 的下面, 或者曲线在弦的上面, 而在切线的下面 (图 6.8)。

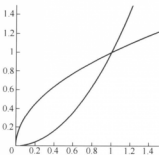
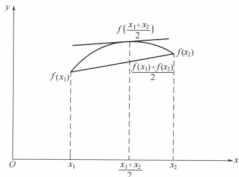
图 6.7 上升曲线的凹 ($y=x^2$) 与凸 ($y=x^{\frac{1}{2}}$)

图 6.8 曲线与弦和切线的关系

(2) 拐点

一般地, 连续曲线 $y=f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点称为曲线的拐点。拐点就是曲线凹凸的转折点, 在计算机图形学中应用广泛, 同时在设计建模中的贝兹曲线也有应用, 特别是拐点的连接曲率, 处理不好将会直接影响三维建模面的质量, 影响到产品的后续设计与制造。如图 6.9 所示为函数 $y=x^3$ 的图形表达, 点 $(0, 0)$ 作为拐点, 是曲线由凸变凹的分界。由图形可直观方便地理解设计数学问题。

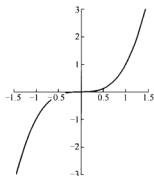
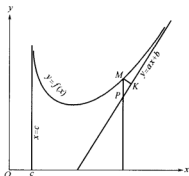
图 6.9 函数 $y=x^3$ 的图形

图 6.10 垂直渐近线与斜渐近线

6.1.4.3 渐近线

若曲线的点沿曲线趋于无穷远时, 此点与直线 $ax+by+c=0$ 的距离趋于零, 那么此直线就为曲线的一条渐近线。所以, 渐近线表明曲线的变化趋势和形状, 从整体上对曲线变化作了规定。设计师应用渐近线可对图形有快速准确的把握。渐近线分为以下 3 类。

① 垂直渐近线: 即平行于 y 轴的渐近线, 也就是 $b=0$ 时的情况。由图 6.10 可知, 当 $x \rightarrow c$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$ 。因此只要有直线 $x=c$, 可使 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, 那么 $x=c$ 就是 $y=f(x)$ 的垂直渐近线。例如, $y=\ln x$, 当 $x \rightarrow +0$ 时 $\ln x \rightarrow -\infty$, 那么 $x=0$ 为 $\ln x$ 的垂直渐近线。

② 水平渐近线: 即平行于 x 轴的直线, 也就是 $a=0$ 时的情况。如图 6.11 所示, 通过数学软件 Mathematica 的参数画图命令生成反正切曲线图形, 观察其函数的一个周期可发现两条水平渐近线。例如在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上, $y=-\pi/2$ 和 $y=\pi/2$ 都是函数的水平渐近线。

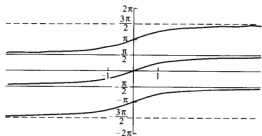


图 6.11 水平渐近线

③ 斜渐近线: 当 $a \neq 0$, 且 $b \neq 0$ 时, 直线不平行于坐标轴, 称为斜渐近线。图 6.10 中的斜线 $y=ax+b$ 就是斜渐近线。

6.1.4.4 函数作图的一般程序

(1) 确定函数的基本性质

- ① 定义范围, 函数值范围, 连续范围。
- ② 函数的奇偶性, 也就是图形的对称性。
- ③ 函数的周期性。

(2) 由导数研究函数性质

① 求出 $y'=0$ 的根及 y' 不存在的点, 以这些点为分点, 把区间分成小部分, 由每一部分中 y' 的符号来决定函数的上升、下降情况。

② 求出 $y'=0$ 及 y' 不存在的点, 以 y'' (如果存在) 的符号或函数的升降情况来确定极值点及极值。

③ 求出 $y''=0$ 或 y'' 不存在的所有点, 然后以 y'' 在这些点左右两边的符号变化来确定曲线的

凹凸范围及拐点。

(3) 确定渐近线

- ① 定出垂直渐近线。
- ② 定出斜渐近线及水平渐近线。
- (4) 描点作图

求出一些特殊点处的函数值，例如与坐标轴的交点、极值点、拐点等，描绘出曲线的大致图形。

当然，随着计算机技术的发展，数码艺术不断涌现，可通过计算机辅助设计来完成复杂图形的绘制，较传统图形绘制有精确、快速、可重复等优点。但对上述图形基本特点的理解依然重要，同时也可以通过计算机绘图反过来研究图形特点。

(5) 绘图实例

作 $x^3 + y^3 - 3axy = 0 (a > 0)$ 的图形。

令 $y = tx$ ，其中 t 为参数，于是方程可以化为以 t 为参数的方程： $x = \frac{3at}{1+t^3}$ ， $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ 。参数 t 的几何意义是所对应曲线上的点与原点连线的斜率，讨论如下。

① 除了 $t = -1$ 外都有定义。

② $\frac{dx}{dt} = \frac{6a(\frac{1}{2} - t^3)}{(1+t^3)^2}$ ， $\frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$ ，当 $t = -1, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时，它们为零或 ∞ ；当 $t = 0, t = \infty$ 时， $x = y = 0$ ；当 $t = 0$ 时， $\frac{dy}{dx} = 0$ ；当 $t = \infty$ 时， $\frac{dy}{dx} = \infty$ 。这就表明曲线的两支，一支与 x 轴相切，另一支与 y 轴相切。

$t < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 时， $y'' > 0$ ，所以曲线为凹。

$t > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 时， $y'' < 0$ ，所以曲线为凸。

③ 渐近线：当 $t = -1$ 时 $x = \infty$ ，而 $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1$ ， $\lim_{t \rightarrow -1} (y+x) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2+3at}{1+t^3} = -a$ ，所以渐近线为 $y = -x - a$ ，即 $x + y + a = 0$ 。

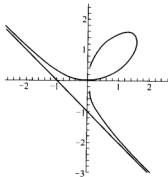


图 6.12 笛卡儿叶形线

④ 描点作图：可由数学软件直接生成，较准确地表达出曲线性质。此曲线为笛卡儿叶形线（图 6.12）。

6.2 微分、微分方程及其图形特征

6.2.1 微分

6.2.1.1 微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 附近 $(x_0-\lambda, x_0+\lambda)$ 有定义。如果存在一个与自变量的改变量 Δx 无关的常数 A （它与 x_0 有关），使得

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，其中 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记为

$$dy = df(x_0) = df(x)|_{x=x_0} = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x = Adx$$

这里已认定自变量的改变量 Δx 与自变量的微分 dx 相等，即当 x 是自变量时有 $\Delta x = dx$ 。

6.2.1.2 导数与微分的关系

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导。并且这时有

$$A = f'(x_0)$$

因此，可导与可微二者可以互相混用。函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分可记为

$$df(x) = f'(x)dx$$

一般地

$$df(x) = f'(x)dx \text{ 或 } dy = y'dx$$

6.2.1.3 微分的几何意义

参看图 6.13，在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图形是一条曲线。对于某一固定的 x_0 值，曲线上有一个确定点 $M(x_0, y_0)$ ，当自变量 x 有微小增量 Δx 时，就得到曲线上另一点 $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 。从图 6.13 可知：

$$MQ = \Delta x$$

$$QN = \Delta y$$

过点 M 作曲线的切线 MT ，它的倾角为 α ，则

$$QP = MQ \cdot \tan \alpha = \Delta x \cdot f'(x_0)$$

即 $dy = QP$

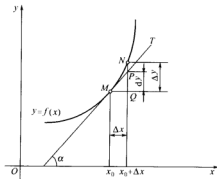


图 6.13 微分的几何意义

由此可见, 当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上的点的纵坐标的增量时, dy 就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量. 当 $|\Delta x|$ 很小时, $|\Delta y - dy|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多. 因此在点 M 的邻近, 可以用切线段来近似代替曲线段.

6.2.1.4 基本法则

(1) 四则运算法则

设函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 都在点 x 处可微, 则它们的和、差、积、商 (这时要求 $v(x) \neq 0$) 都可微, 并且

$$\begin{aligned}(u \pm v)' &= u' \pm v' & d(u \pm v) &= du \pm dv \\ (uv)' &= u'v + uv' & d(uv) &= vdu + u dv \\ (cv)' &= cu' & d(cv) &= c dv \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} & d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{vdu - u dv}{v^2}\end{aligned}$$

(2) 复合函数求导法则

设 $y=y(u)$ 在点 $u=u(x)$ 处可微, $u(x)$ 在点 x 处可微, 则复合函数 $y=y[u(x)]$ 在点 x 处可微, 并且

$$\begin{aligned}y'_x &= y'_u \cdot u'_x \\ dy &= y'_u du = y'_u \cdot u'_x dx = y'_x dx\end{aligned}$$

这个连等式中包含有等式 $y'_u du = y'_x dx$, 表明 y 对中间变量 u 的微分等于 y 对自变量 x 的微分. 这个性质称为一阶微分形式不变性.

(3) 反函数求导法则

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处有不等于零的导数, 并且它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应点 y 处连续, 则 $x=f^{-1}(y)$ 在该点 y 处可微, 并且 $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

(4) 用参数表示的函数求导法则

如果参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 中的函数 $\varphi(t)$ 、 $\psi(t)$ 都是可微的, 并且 $\psi'(t) \neq 0$, 则这组参数方程把 y 确定为 x 的可微函数 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$, 它的导数是

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

(5) 用取对数的方法求导数

① 对于幂指函数 $y=u^v$

(其中 u 、 v 都是 x 的可微函数), 可由公式

$$u^v = e^{v \ln u}$$

得到

$$(u^v)'_x = e^{v \ln u} [v(\ln u)' + v' \ln u] = u^v \left[\frac{v u'}{u} + \ln u \right]$$

② 对于多因式连乘连除的函数

$$y = \frac{u_1 u_2 \cdots u_n}{v_1 v_2 \cdots v_m}$$

其中 u_1, u_2, \dots, u_n 及 v_1, v_2, \dots, v_m 都是 x 的可微函数, 可由公式

$$y = e^{\ln y}$$

或

$$\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n - \ln v_1 - \ln v_2 - \cdots - \ln v_m$$

得到

$$y = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \cdots + \frac{u_n'}{u_n} - \frac{v_1'}{v_1} - \frac{v_2'}{v_2} - \cdots - \frac{v_m'}{v_m}$$

6.2.1.5 导数与微分公式

$$\textcircled{1} (u^n)' = nu^{n-1} u'$$

$$d(u^n) = nu^{n-1} du$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$\textcircled{2} (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$d(\ln u) = \frac{du}{u}$$

$$(\log u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$d(\log u) = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\textcircled{3} (e^u)' = e^u u'$$

$$d(e^u) = e^u du$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$d(a^u) = a^u \ln a \cdot du$$

$$\textcircled{4} (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$d(\sin u) = \cos u \cdot du$$

$$\textcircled{5} (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$d(\cos u) = -\sin u \cdot du$$

$$\textcircled{6} (\tan u)' = \sec^2 u \cdot u'$$

$$d(\tan u) = \sec^2 u \cdot du$$

$$\textcircled{7} (\cot u)' = -\csc^2 u \cdot u'$$

$$d(\cot u) = -\csc^2 u \cdot du$$

$$\textcircled{8} (\sec u)' = \sec u \tan u \cdot u'$$

$$d(\sec u) = \sec u \tan u \cdot du$$

$$\textcircled{9} (\csc u)' = -\csc u \cot u \cdot u'$$

$$d(\csc u) = -\csc u \cot u \cdot du$$

$$\textcircled{10} (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\textcircled{11} (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\textcircled{12} (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$d(\arctan u) = \frac{du}{1+u^2}$$

$$\textcircled{13} (\operatorname{arccot} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$d(\operatorname{arccot} u) = -\frac{du}{1+u^2}$$

$$\textcircled{14} (\operatorname{arcsec} u)' = \frac{u'}{u \sqrt{u^2-1}}$$

$$d(\operatorname{arcsec} u) = \frac{du}{u \sqrt{u^2-1}}$$

$$\textcircled{15} (\operatorname{arccsc} u)' = -\frac{u'}{u \sqrt{u^2-1}}$$

$$d(\operatorname{arccsc} u) = -\frac{du}{u \sqrt{u^2-1}}$$

$$\textcircled{16} (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$$

$$d(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u \cdot du$$

$$\textcircled{17} (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$$

$$d(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u \cdot du$$

$$\textcircled{18} (\operatorname{th} u)' = \operatorname{sech}^2 u \cdot u'$$

$$d(\operatorname{th} u) = \operatorname{sech}^2 u \cdot du$$

$$\textcircled{19} (\operatorname{coth} u)' = -\operatorname{csch}^2 u \cdot u'$$

$$d(\operatorname{coth} u) = -\operatorname{csch}^2 u \cdot du$$

$$\textcircled{20} (\operatorname{sech} u)' = -\operatorname{th} u \operatorname{sech} u \cdot u'$$

$$d(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{th} u \operatorname{sech} u \cdot du$$

$$\textcircled{21} (\operatorname{csch} u)' = -\operatorname{cth} u \operatorname{csch} u \cdot u'$$

$$d(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{cth} u \operatorname{csch} u \cdot du$$

$$\textcircled{22} (\operatorname{sh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$d(\operatorname{sh}^{-1} u) = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\textcircled{23} (\operatorname{ch}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$d(\operatorname{ch}^{-1} u) = \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$\textcircled{24} (\operatorname{th}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$d(\operatorname{th}^{-1} u) = \frac{du}{1-u^2}$$

$$\textcircled{25} (\operatorname{coth}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$d(\operatorname{coth}^{-1} u) = \frac{du}{1-u^2}$$

$$\textcircled{26} (\operatorname{sech}^{-1} u)' = -\frac{u'}{u \sqrt{1-u^2}}$$

$$d(\operatorname{sech}^{-1} u) = -\frac{du}{u \sqrt{1-u^2}}$$

$$\textcircled{27} (\operatorname{csch}^{-1} u)' = -\frac{u'}{u \sqrt{1+u^2}}$$

$$d(\operatorname{csch}^{-1} u) = -\frac{du}{u \sqrt{1+u^2}}$$

6.2.1.6 高阶导数与高阶微分

(1) 高阶导数的概念

如果函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 在点 x_0 处可导, 则称 $f'(x)$ 在 x_0 处的导数是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数, 记为 $y''=f''(x)$ 。即

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

一般地, 函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导函数 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ 在点 x_0 处的导数称为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的 $n+1$ 阶导数, 记为 $f^{(n+1)}(x_0)$ 。即

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n)}(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

二阶及二阶以上的导数统称高阶导数。在点 x_0 处的高阶导数常用的记法有

$$f^{(n)}(x_0) = y^{(n)} \big|_{x=x_0} = \frac{d^n y}{dx^n} \big|_{x=x_0} = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \big|_{x=x_0}$$

高阶导函数常用的记法有

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

(2) 高阶微分的概念

① 函数 $y=f(x)$ 的一阶微分 $dy=f'(x) dx$ 仍是 x 的函数, 于是再对 x 求微分就得到

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(dy) = d(f'(x)) dx \\ &= (df'(x)) dx + f'(x) d(dx) \end{aligned}$$

即

$$d^2 f(x) = f''(x) (dx)^2 + f'(x) d^2 x$$

称为函数 $f(x)$ 的二阶微分。类似地定义 $f(x)$ 的三阶微分、四阶微分……统称为高阶微分。

② 当 x 是自变量时

$$d^2 x = d(dx) = d(\Delta x) = 0$$

于是 $f(x)$ 的二阶微分为

$$d^2 y = f''(x) (dx)^2$$

$f(x)$ 的 n 阶微分为

$$d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$f(x)$ 的二阶微分不再具有形式不变性。

(3) 莱布尼兹公式

如果 u, v 都是 x 的可微分 n 次的函数, 则

$$(uv)^n = \sum_{i=0}^n c_n^i u^i v^{(n-i)}$$

其中 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v, c_n^i$ 是二项式系数。

$$d(uv) = \sum_{i=0}^n c_n^i d^i u \cdot d^{n-i} v$$

其中 $d^0 u = u, d^0 v = v$ 。

(4) 参数方程表示的函数的高阶导数

由参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的二阶导数为

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{d}{dx} y'_x = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3} \\ &= \frac{\ddot{x} \dot{y} - \dot{x} \ddot{y}}{\dot{x}^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{三阶导数为} \quad y'''_{xxx} &= \frac{d}{dx} y''_{xx} = \frac{\frac{d}{dt} y''_{xx}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{dx}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^3 x}{dt^3} \cdot \frac{dy}{dt} \right) - 3 \frac{d^2 x}{dt^2} \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^5} \end{aligned}$$

6.2.1.7 一些函数的 n 阶导数公式

$$\textcircled{1} y = \sqrt{x}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} x^{-(n-\frac{1}{2})}$$

$$\textcircled{2} y = \frac{1}{x}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

$$\textcircled{3} y = (1+x)^m$$

$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$\textcircled{4} y = \sin x$$

$$y^{(n)} = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$\textcircled{5} y = \cos x$$

$$y^{(n)} = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$⑥ y = \sin^2 x$$

$$y^{(n)} = -2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$⑦ y = \arctan x$$

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n x \sin \left(nx + \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$⑧ y = \operatorname{arccot} x$$

$$y^{(n)} = (-1)^n (n-1)! \sin^n x \cos nx$$

$$⑨ y = e^x$$

$$y^{(n)} = e^x$$

$$⑩ y = a^x$$

$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

$$⑪ y = e^{ax+b}$$

$$y^{(n)} = a^n e^{ax+b}$$

$$⑫ y = \log_a x$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n \ln a}$$

$$⑬ y = \ln(1+x)$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$⑭ y = e^{ax} \sin bx$$

$$y^{(n)} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin \left(bx + n \arctan \frac{b}{a} \right)$$

6.2.2 函数的微分运算以及图形特征

如果一个函数在它的定义区间内的每一点都可微分, 则它在此区间内的每一个 x 点都对应一个相应的微分值。所以, 此函数的微分函数也是关于 x 的函数。在求微分时, 常用到一些微分基本公式, 通过这些微分公式画出其图形, 从这些图形中提取一些构成形式或经过变换应用到设计中, 以此扩展微分在设计中的应用以及进一步深化对高等数学知识的理解。下面是一些微分基本公式图形。

【例 2】 求函数 $y = 5^{\sin x}$ 的微分, 并显示函数 $y = 5^{\sin x}$ 及其微分图。

结果: $dy = 5^{\sin x} \cos x \ln 5 dx$ 。显示如图 6.14。

【例 3】 求函数 $y = \cos(\sin x)$ 的微分, 并显示函数 $y = \cos(\sin x)$ 及其微分图。

结果: $dy = -\sin(\sin x) \cos(x) dx$ 。显示如图 6.15。

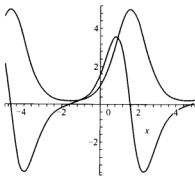


图 6.14 函数 $y = 5^{\sin x}$ 及其微分图

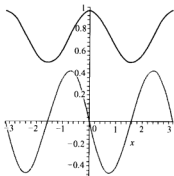


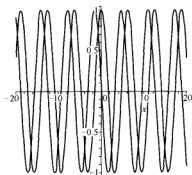
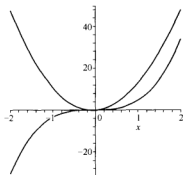
图 6.15 函数 $y = \cos(\sin x)$ 及其微分图

【例 4】 求函数 $y = \cos x$ 的微分, 并显示函数 $y = \cos x$ 及其微分图。

结果: $dy = -\sin x dx$ 。显示如图 6.16。

【例 5】 求函数 $y = x \sin x + 4x^3$ 的微分, 并显示函数 $y = x \sin x + 4x^3$ 及其微分图。

结果: $dy = \sin x + x \cos x + 12x^2 dx$ 。函数 $y = x \sin x + 4x^3$ 与其微分的图形显示如图 6.17。

图 6.16 函数 $y = \cos x$ 及其微分图图 6.17 函数 $y = x \sin x + 4x^3$ 及其微分图

在此图中，黑色的粗线表示函数 $y = x \sin x + 4x^3$ 。细线表示其微分图，它反映了随着原函数中 x 的变化， y 值的变化。

6.2.3 函数的微分及其构成

在例 5 中，如果 $y = \sin x + x \cos x + 12x^2$ 在其定义区间可以微分，则可称为微分图。依此类推，可以画出函数 $y = x \sin x + 4x^3$ 的多次微分图。如果把把这些函数图形的线形显示方式加以变化，在其相交区域添加一定色彩区分，即可以形成优美构图。如对函数 $y = x \sin x$ 进行 4 次微分，显示如图 6.18，可作为函数的微分在平面构成中的应用。

通过对若干单个微分图的复合、重复、排列，可形成较为复杂且具有一定形式美的设计图形。这些图形不仅具有数学的理性，而且具有艺术的美感。

6.2.4 微分方程

简而言之，函数与其导数所组成的方程称为微分方程。如果方程中的未知函数是一元函数，则称之为常微分方程，如果方程中的未知函数的自变量多于一个，则称之为偏微分方程。微分方程的解，就是满足该方程的函数。例如求： $y' - 2e^x + 1 = 0$ 的解，得到 $y(x) = 2e^x - x + C_1$ 。由于方程没有指定初始条件，所以它的解为一个带常数 C_1 的通解。如果给常数赋以某一特定值，则可得到关于此方程的特定解。例如，给此常数赋以 0, 2, 3, 5, 9，可以得到 5 个不同的特解，如图 6.19 所示。

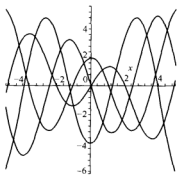


图 6.18 微分图的复合排列

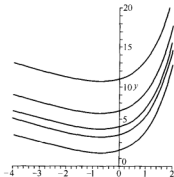


图 6.19 微分方程的解

因为常数的微分为 0, 所以 $_C1$ 可以取任意常数, 即微分方程的特解只是其通解的子集。在一般的科学计算中可以通过具体的条件来确定常数 $_C1$ 的取值。在设计中可以利用不同微分方程, 在坐标系中有不同的曲线这一特征, 合并不同的微分方程图形, 或者在此基础上, 给 $_C1$ 赋以特定的值, 并使用构成中的基本手段, 直接应用到现实设计中。

6.2.5 微分方程的运算及其图形特征

常微分方程分为一阶常微分方程、高阶常微分方程, 还可分为线性方程、非线性方程。下面以一阶常微分方程、一阶线性常微分方程来说明微分方程的图形特征。

一阶常微分方程: 函数与其导数所组成的方程, 且微商为一阶。

【例 6】 求解 $\sin(y)y' = \sin x$ 的通解及特解并显示。

结果: $y(x) = \pi - \arccos(-\cos x + _C1)$ 。给 $_C1$ 赋以特值 0, 1, -1, 则可得其通解。显示如图 6.20。

高阶常微分方程: 函数与其导数所组成的方程, 且微商大于一阶。

【例 7】 求解 $x^2 y'' + xy' + x = 0$ 的通解及特解并显示。

结果: $y(x) = _C1 \ln x - x + _C2$ 。给 $_C1$ 赋以特值 2, $_C2$ 赋以特值 1, 2, 3, 则可得其通解。显示如图 6.21。

一阶线性常微分方程: 阶数为 1, 呈线性。

【例 8】 求解 $\frac{dy}{dx} - \cos\left(\frac{1}{3}\right)y = \cos x$, 在 $y(0) = 0$ 的特解并显示。

结果: $y(x) = \frac{8}{3} \sin \frac{x}{3} - 2 \cos \frac{2x}{3} + \frac{17}{9} + \frac{e^{3 \sin \frac{1}{3}}}{9}$ 。显示如图 6.22。

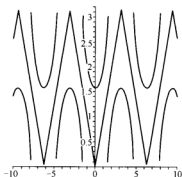


图 6.20 微分方程

$\sin(y)y' = \sin x$ 的解

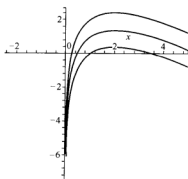


图 6.21 高阶常微分方程

$x^2 y'' + xy' + x = 0$ 的解

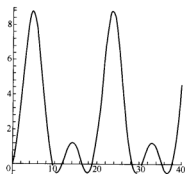


图 6.22 一阶线性常微分方程

$\frac{dy}{dx} - \cos\left(\frac{1}{3}\right)y = \cos x$ 的解

6.3 积分及其应用

积分概念来自对某些具体问题的求解,其典型例子是求曲线形面积的问题。通过对求曲线形面积的理解掌握微分学与积分学之间的内在联系。其中,积分可以分为定积分与不定积分两类。

6.3.1 不定积分

6.3.1.1 不定积分的概念

一般地,当已知某一定义区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 的微商为 $g(x)$ 时,称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的原函数。如果函数 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)$,那么它就有无穷多个原函数,并且所有原函数刚好组成函数族 $F(x)+C$ (C 是任意常数)。函数 $f(x)$ 的所有原函数的全体就称为函数 $f(x)$ 的不定积分。据定义,只要找到一个 $f(x)$ 的原函数,就可找到 $f(x)$ 的不定积分。

【例 9】 求切线为 $2x$ 的曲线。

解 因为 $\frac{dy}{dx}=2x$, 所以 $y=x^2$ 是一个原函数,故全部曲线族为: $y=x^2+C$ 。

通过对积分常数 C 赋特值,可以显示其积分曲线族(图 6.23)。图中给 C 赋特值 1, 2, 3, 4, 然后把它们合并。若在此基础上,与 $y=2x^3-5x^2-3x+4$ 的积分曲线族合并,即可形成更为复杂的图形。

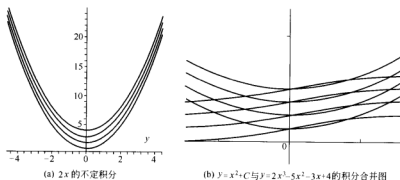


图 6.23 积分曲线族 (C 取特值 1, 2, 3, 4)

【例 10】 求不定积分 $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x} - \sin x \right) dx$ 。

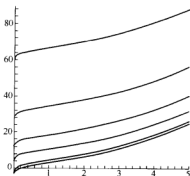
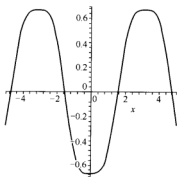
结果: $y=2x^{\frac{3}{2}}+\ln|x|+\cos x+C$ 。给 C 赋特值: 1, 2, 8, 16, 32, 64, 显示如图 6.24。

6.3.1.2 变量变换

在求不定积分时,更换积分变量非常有用。如果找到一个可微函数 $\Phi(x)$,使得被积函数 $F(x)$ 可以写成 $f[\Phi(x)]$ 及微商的乘积,即 $F(x)=f[\Phi(x)]\Phi'(x)$ 。那么

$$\int F(x)dx = \int f[\Phi(x)]\Phi'(x)dx$$

再作变换 $y=\Phi(x)$, 上式右边可以写为: $\int f(y)dy$ 。 $f(y)$ 比 $F(x)$ 易于利用公式,待

图 6.24 $\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{x} - \sin x) dx$ 的不定积分图 6.25 $\int \sin x^3 dx$ 的不定积分

求出不定积分时, 再用 $y = \Phi(x)$ 代回, 便可求得不定积分 $\int F(x) dx$ 。

【例 11】 求不定积分 $\int \sin x^3 dx$, 并用图形显示。

解 用 $1 - \cos^2 x$ 代 $\sin^2 x$, 可得结果 $y = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$ 。给 C 赋特值 0, 显示如图 6.25。

6.3.1.3 分部积分

当 u 和 v 都是 x 的可微函数时: $d(uv) = u dv + v du$ 。

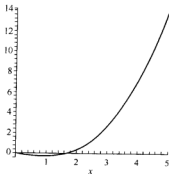
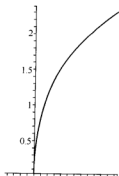
因而, $uv = \int u dv + \int v du$, 所以, $\int u dv = uv - \int v du$ 。这就是分部积分公式。

【例 12】 求不定积分 $\int x \ln x dx$ 。

令 $u = \ln x$, $dv = x dx$, 解得: $y = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ 。令 $C = 0$, 画图, 显示如图 6.26。

6.3.1.4 无理函数的积分

【例 13】 求不定积分 $I = \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x}}$ 。

图 6.26 $\int x \ln x dx$ 的不定积分图 6.27 $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x}}$ 的不定积分

解 令 $\sqrt[6]{x}=t$, 解得 $I=(\sqrt[6]{x}-\arctan 6\sqrt{x})+C$ 。令 $C=0$, 画图, 显示如图 6.27。

6.3.1.5 超越函数的积分

【例 14】求积分 $\int \frac{dx}{5+4\cos 2x}$ 。

解 令 $z=\tan x$, 则 $\cos 2x=\frac{1+z^2}{1+z^2}$ 。解得: $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan x\right)+C$ 。令 $C=0$, 画图,

显示如图 6.28。

6.3.2 定积分

6.3.2.1 定积分的概念

曲边梯形的面积: 在设计实践中, 有些问题的计算常常归结为计算一个由曲线围成的图形的面积。例如在设计船体时, 需要计算水线面面积, 即用水平面去截满载船体所得截面的面积。又如测量河流的流量, 需要知道河床断面的面积。这些都需要讨论由曲线围成的图形的面积问题。从几何直观来看, 由曲线围成的图形的面积, 往往可以化分为两个曲边梯形的面积的差。所谓曲边梯形是这样的图形, 三条边是直线段, 其中两条相互平行, 第三条与前两条垂直, 称为底边; 第四条边是一条曲线弧, 称为曲边, 这条曲边与任意一条垂直于底边的直线至多只交于一点。因此, 讨论由曲线围成的图形的面积问题就可归结为讨论曲边梯形的面积问题。

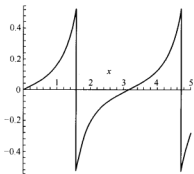


图 6.28 $\int \frac{dx}{5+4\cos 2x}$ 的积分

设在 x 轴上有一条曲线是函数 $y=f(x)$ 的图形。试求由曲线 $y=f(x)$, x 轴以及通过点 $x=a$ 与点 $x=b$ 而跟 y 轴平行的两条直线所围成的图形的面积 S , 它的面积可按公式“矩形面积=高 \times 低”定义和计算。但由于曲边梯形在底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是变动的, 故其面积不能直接按上述公式定义和计算。由于曲边梯形的高 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续变化的, 在很小一段区间上它的变化很小, 近似于不变。因此, 如果把区间 $[a, b]$ 分成许多小区间, 在每个小区间上用其中某一点处的高来近似代替同一个小区间上的窄曲边梯形的高。那么, 每个窄曲边梯形就可近似地看成这样得到的窄矩形。以所有窄矩形面积之和作为曲边梯形面积的近似值, 并把区间 $[a, b]$ 无限细分, 使得每个小区间都缩向一点, 即其长度趋于零, 这时所有窄矩形面积之和的极限就可定义为曲边梯形的面积。定义同时也给出了计算曲边梯形面积的方法, 现详述如下。

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个 (不必等长的) 小段, 第一个小段的长度记作 Δx_1 , 第二个 Δx_2 , \dots , 最后一个 Δx_n , 在每一个小段中各选定一点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 这 n 个窄矩形的面积之和为: $S_n=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\dots+f(\xi_n)\Delta x_n$ 。把区间 $[a, b]$ 分得越细, S_n 将与面积 S 越接近。若把 $[a, b]$ 分成越来越细的小段而作出一连串这样的图, 则 S_n 将趋于 S 。

因为 $[a, b]$ 可以分作不相等的小段。假定 n 无限增大, 各小段长度 Δx_i 中的最大者也趋于零。记 $\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$, 于是

$$S=\lim_{\lambda \rightarrow 0}[f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\dots+f(\xi_n)\Delta x_n]=\lim_{\lambda \rightarrow 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

面积的计算已归结为极限的求解。

假定 $f(x) \geq 0$ 。若 $f(x)$ 改变正负号，则极限所给出的是位于曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴之间的各块面积的代数和，其中位于 x 轴之上的各块面积带正号，位于 x 轴之下的带负号。

简而言之，定积分是在函数 $y=f(x)$ 的定义区间 $[a, b]$ 上，把此区间分为等大的无穷多个小区间，然后求每个小区间与函数 $y=f(x)$ 所围成的面积（当区间无穷小时可以用一个矩形替代小区间与函数 $y=f(x)$ 所围成的曲边矩形），最后再求无穷多个小矩形的面积之和，面积和就是函数 $y=f(x)$ 的定义区间 $[a, b]$ 上的定积分。

6.3.2.2 定积分的应用和定积分的近似计算

(1) 曲线的弧长

一根直线的长度是可以直接度量的。但计算一条曲线段的“长度”，一般却不能直接度量。也不能把曲线“拉直”再来作直接度量，因此需要用另一种办法来度量它。

① 由 $y=f(t)$ ($a \leq t \leq b$) 所给出的一个曲线段，可以用参数方程来表示这个曲线段，参数为 x ，即此曲线段的参数方程为

$$\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \end{cases} \quad (a \leq x \leq b)$$

弧长公式得

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

② 由极坐标方程所给出的曲线段

$$r=r(\theta) \quad (a \leq \theta \leq \beta)$$

假设 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数。因为

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (a \leq \theta \leq \beta)$$

所以弧长公式为

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_a^b \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

(2) 平面图形的面积

设一块由连续曲线 $y=f(x)$ ($f(x) \geq 0$) 和横坐标 Ox 以及两根直线 $x=a$, $x=b$ ($a < b$) 所围成的曲边梯形（图 6.29）。要计算这块图形的面积 A ，由定积分的引进及其定义知道，面积 A 的公式为

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

如果一块图形是由连续曲线 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ 以及 $x=a$, $x=b$ ($a < b$) 所围成，并且在 $[a, b]$ 上 $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ ，那么这块图形的面积 A

$$A = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

(3) 体积

① 已知几何体的截面而求此几何体的体积。

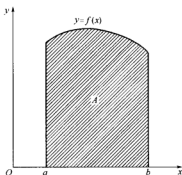


图 6.29 平面图形的面积

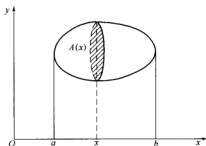


图 6.30 体积

设有一物体，它被垂直于某一直线（设为 x 轴）的截面所截的面积 $A(x)$ 为 x 的连续函数。这物体的位置是居于 $x=a$ 和 $x=b$ ($a < b$) 之间的（图 6.30）。

在已知几何体截面积 $A(x)$ （连续函数）的情况下，该物体的体积公式

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

② 求旋转体的体积。

设有一块以连续曲线 $y=f(x)$ ， $f(x) \geq 0$ 以及两条直线 $x=a$ ， $x=b$ ($a < b$) 和 x 轴所围成的面积，将这块面积绕 x 轴旋转而生成一个旋转体（图 6.31），已知这个旋转体垂直于 x 轴的截面积为

$$A(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$$

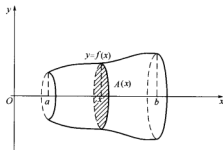


图 6.31 旋转体的体积

代入体积公式，即得旋转体体积公式

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

中国古代数学家在计算体积时，早就得到一个重要原理，那就是：“幂势既同则积不容异”（幂势的意思就是截面积）。这就是本节中所依据的原理，这一原理直到一千多年以后才被意大利数学家提出来。

(4) 旋转体的侧面积

设将平面曲线 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) ($f(x) \geq 0$, $f'(x)$ 连续) 绕 x 轴旋转得一旋转面。其面积 F 如下

$$F = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$$

(5) 重心

弧的重心坐标 \bar{x} 及 \bar{y} 的公式

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \rho(x) ds}{\int_a^b \rho(x) ds} = \frac{\int_a^b x ds}{M}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y \rho(x) ds}{\int_a^b \rho(x) ds} = \frac{\int_a^b y ds}{M}$$

其中, $dm = \rho(x) ds$, $M = \int_a^b \rho(x) ds$ 为弧 (l) 的质量。 dm 的直观意义是这样的, 当小弧段 Δs_i 充分小时, 它的质量近似地为 $\Delta m_i = \rho(\xi_i) \Delta s_i$ ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$), 再令 $\lambda \rightarrow 0$, 就得到微分式 $dm = \rho(x) ds$ 。

6.3.3 积分在设计中的应用

6.3.3.1 不定积分在设计中的应用

(1) $\int \sin x^3 dx$ 不定积分函数图形的平面变换

$\int \sin x^3 dx$ 的不定积分如图 6.32 所示。

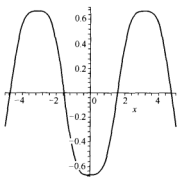


图 6.32 $\int \sin x^3 dx$ 的不定积分

图 6.33 由 $\int \sin x^3 dx$ 的不定积分图形变换而成。



图 6.33 热烈的太阳 (李刚)

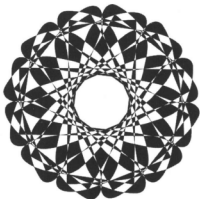


图 6.34 抽象的花瓣 (李刚)

制作方法：将 $\int \sin x^3 dx$ 不定积分图形导入 Corel DRAW 软件中，进行颜色填充（此处为黑色），进行旋转复制，再将所产生的图形重叠部分剪去就可以得到，图形可以看作是太阳和其烈焰，体现了一种永不休止的动感。

图 6.34 由 $\int \sin x^3 dx$ 的不定积分图形变换而成。

制作方法：将 $\int \sin x^3 dx$ 的不定积分图形导入 Corel DRAW 软件中，进行一定的组合变换，再进行颜色填充（此处为黑色），进行旋转复制，然后将所产生的图形重叠部分剪去得到。“抽象的花瓣”图形在构图上追求一种平衡稳定感，但在细部给人的感觉却又有“一定的混乱”。一定的规律性，局部的不可控性也反映了自然的造物规律。

图 6.35 由 $\int \sin x^3 dx$ 的不定积分图形变换而成。

制作方法：将 $\int \sin x^3 dx$ 的不定积分图形导入 Corel DRAW 软件中，进行一定的组合变换，再进行颜色填充（此处为黑色），进行旋转复制，然后将所产生的图形重叠部分剪去得到。“动态的羽毛”的图形构成表现的是永不休止的运动变化，从整体上看似乎与方形没有关系，但它却是由各个不同的方形所构成。这就说明，艺术不是一览无余的，要有一定的层次感。

图 6.36 由 $\int \sin x^3 dx$ 的不定积分图形变换而成。

制作方法：将 $\int \sin x^3 dx$ 不定积分图形导入 Corel DRAW 软件中，进行一定的组合变换，再进行颜色填充（此处为黑色），进行旋转复制，然后将所产生的图形重叠部分剪去得到。“麦芽”图形运用了分形自相似性原理，追求的是一种自然的情趣和可控的野性。

图 6.37 由 $\int \sin x^3 dx$ 的不定积分图形变换而成。

制作方法：由麦芽图形旋转产生。

“花瓣”的构型模拟自然界中花瓣的形状，似乎表现出一种夸张的、外向的情感。

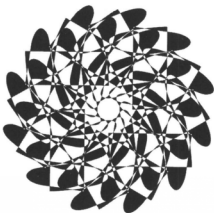


图 6.35 动态的羽毛 (李刚)



图 6.36 麦芽 (李刚)

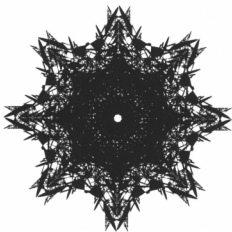


图 6.37 花瓣 (李刚)

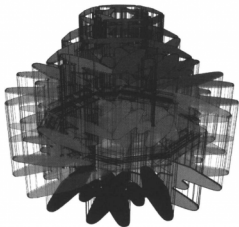


图 6.38 分形的螺栓 (李刚)

(2) $\int \sin x^3 dx$ 不定积分函数图形的立体变换

制作方法 (图 6.38): 将 $\int \sin x^3 dx$ 的不定积分函数图形导入 Rhinoceros 软件中, 将曲线拉伸为立体图形, 进行旋转复制和放大缩小变换, 再将得到的立体构成导入到 Adobe Illustrator, 进行色彩变换和透明度变换。

“分形的螺栓”采用 $\int \sin x^3 dx$ 不定积分函数图形作为基本构型, 生成的立体旋转成螺栓式形体和圆柱式形体。利用分形自相似原理进行等比复制, 得到“塔”式形体。它所表达的是虽然函数曲线看似简单, 但通过组合可构成几乎无限的形态, 从而达到“大珠小珠落玉盘”的效果。它也反映了分形部分与整体的关系——部分与整体之间具有一定的相

似性。

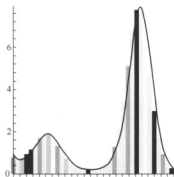


图 6.39 $y = x^{\sin x}$ 的区间分割

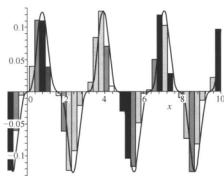


图 6.40 $y = \sin x^3 \cos x^3$ 的区间分割

6.3.3.2 定积分在设计中的应用

在数学计算以及其他应用领域，一般要求结果精确。所以在 $y = f(x)$ 的定义区间 $[a, b]$ 分割的区间越多，其结果越精确。但不同于数学计算，艺术设计可以通过夸张的手段，用几个有限的小区间（可以是不等大的区间）去象征性地分割这个区间，然后再用给这些区间添色、改变显示方式等手段，来反映节奏、变化、韵律、重复等美学法则。

【例 15】 把 $y = x^{\sin x}$ 的区间 $[-1, 10]$ 用 40 个等大的小区间分割，然后调节每个区间的显示，用不同色彩填充，得到图 6.39。

【例 16】 $y = \sin x^3 \cos x^3$ 在区间 $[-1, 10]$ 上用 40 个等大区间分割，然后填充色彩，得到图 6.40。

6.4 小结

① 微分与积分合起来通称为微积分，是高等数学的基础，不仅在数学计算及其他领域有着广泛的应用，在艺术设计领域同样发挥着重要的作用。

② 导数本身就是函数图形的变化率，利用导数的性质可以判定函数图形的变化性态，确定其增减区间、凹凸范围、曲线拐点和渐近线，并求其极值，提供准确作出图形的科学依据。

③ 微分是函数的局部线性化，应用微分可以求解平面曲线的切线、法线、曲率和曲率半径，得到空间曲线的切线和法平面，空间曲面的切平面和法线。

④ 不定积分是微分的逆运算，是求微分和导数的原函数，对于最基本的不定积分掌握其积分法则，对于较复杂的不定积分可通过查积分表求得。

⑤ 定积分反映了函数在该区间的整体性质，应用定积分可以求解函数图形的面积、物体的体积及其相关的问题。

第7章

级数、傅里叶级数与节奏



- 级数基本概念
- 幂级数
- 傅里叶级数
- 小结

无穷级数是高等数学中的一个重要组成部分，是表示函数、研究函数的性质以及进行数值计算的重要工具。法国数学家傅里叶证明了所有声音，不管是复杂的还是简单的，都可以用数学公式来进行全面描述，并提出函数展开为三角级数——傅里叶级数的问题。由于三角函数的周期性，傅里叶级数对于描述和研究设计中具有周期性的节奏韵律十分有用。

节奏意味着有规律地重复出现，是一个有秩序的进程。要素的重复，点、线、面、体积、比例、肌理和色彩的和谐，都是节奏研究的对象，节奏可以像节拍那样有规律、有特点地重复，也可以是无规律的、连续的，自由的和波状形的。保持了节奏就能感到愉悦。所有造型物都必须包含节奏的要素，有秩序构成的反复循环的配合与配置，产生韵律，述诉人的感情。应用傅里叶级数建立起一定的节奏，能够描绘出几何图形，预见其连续出现的规律。通过傅里叶级数表达和感受的节奏并不一定限于机械性的重复，可以涉及到一切起伏变化的运动，包括重复形成的节奏、间隔重复形成的节奏、交替形成的节奏和渐变形成的节奏，能够体验到秩序快感的艺术美，同时理解其内在的数学美。

7.1 级数基本概念

7.1.1 常数项级数

设已给数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ，则式子

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

或简写成 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 叫做无穷级数，或就叫做级数。其中第 n 项 u_n 就叫做级数的一般项。

作级数的前 n 项和

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

可得到另一个数列：

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

根据这个数列有没有极限，可以引入无穷级数的收敛与发散的概念。

定义：当 n 为无限增大时，如数列 s_n 趋近于一个极限（有限的）

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

就叫无穷级数收敛, 这时 s 叫做级数的和, 并写成

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

若 s_n 没有极限, 则叫无穷级数是发散的。

当无穷级数收敛时, 其前 n 项的和 s_n 是级数的和 s 的近似值, 它们之间的差值

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

叫做级数和的 n 项后的余项。用近似 s_n 代替 s 所产生的误差是这个余项的绝对值, 则误差是 $|r_n|$ 。

最简单的级数是几何级数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

其中, r 叫做级数的公比, 现在来考虑它的敛散性。

今若 $|r| \neq 1$, 则

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

当 $|r| < 1$ 时, 由于 $\frac{ar^n}{1 - r} \rightarrow 0$, 所以 $s_n \rightarrow \frac{a}{1 - r}$, 这时几何级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1 - r}$ 。当

$|r| > 1$ 时, $\frac{ar^n}{1 - r} \rightarrow \infty$, 故 $s_n \rightarrow \infty$, 因而几何级数发散。当 $r = 1$ 时, $s_n = na \rightarrow \infty$, 故几何级数发散。当 $r = -1$ 时, 级数成为 $a - a + a - a + \cdots$, 显然, s_n 随 n 为奇数或为偶数而等于 a 或等于零, 故极限不存在, 从而级数发散。综合上述结果, 可以得到: 若几何级数之公比 r 的绝对值 $|r| < 1$ 时, 则此级数收敛, 若 $|r| \geq 1$ 时, 则此级数发散。

7.1.2 函数项级数

设 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \cdots$) 是定义在区间 (a, b) 上的函数, 序列

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

称为函数的序列。对于区间 (a, b) 上的某一个序列, 对于另一值, 它成为另一序列。

$$\text{式子} \quad u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (7.1)$$

或简写成: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 称为定义在区间 (a, b) 上的函数项级数。对于区间 (a, b) 上的每一个 x_0 , 函数项级数成为常数项级数

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \quad (7.2)$$

这个级数式 (7.2) 有可能收敛也有可能发散。如果式 (7.2) 收敛, 则称点 x_0 是函数项级数式 (7.1) 的收敛点。如果式 (7.2) 发散, 则称 x_0 是函数项级数式 (7.1) 的发散点。显然, 区间 (a, b) 上的每一个点对函数项级数来说不是收敛点就是发散点。所有收敛点的全体称为函数项级数的收敛域, 所有发散点的全体称为函数项级数的发散域。一般来说, 收敛域或发散域的结构可能是很复杂的。但是以后要作为重点讨论的一种特殊类型的函数项级数, 即幂级数来说, 则收敛域的结构很简单, 它是一个区间。

因为对于在区间 (a, b) 上有定义的函数项级数式 (7.1) 来说, 区间 (a, b) 上的每一个值 x_0 均使它成为一常数项级数, 因此可以把函数项级数看作是一组常数项级数。

这种看法就有可能把关于常数项级数的知识引用来研究函数项级数。

一般来说,并不是区间 (a, b) 上的每一个点刚好都使函数项级数收敛或发散,而是一部分点使它收敛,另一部分点使它发散。因此,敛散性的问题对函数项级数的正确的提法应该是:区间 (a, b) 上的哪些点使函数项级数发散而哪些点使函数项级数收敛。

下面看一个简单的例子。

考虑函数项级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

这级数在区间 $(-\infty, \infty)$ 上有定义。当 $|x|<1$ 时,这级数收敛,当 $|x|\geq 1$ 时,这级数发散。因此这级数的收敛域是开区间 $(-1, 1)$, 发散域是 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$ 。如果点 x 在收敛域内,则

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x} \quad (7.3)$$

对应于收敛域内的每一个 x , 函数项级数成为一收敛的常数项级数,因而有一确定的和 s 。这样,在收敛域上,函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$ 。这函数的定义域就是级数的收敛域,可以写成

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \quad (7.4)$$

把函数项级数 (7.1) 的前 n 项和记作 $s_n(x)$, 则在收敛域上有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)=s(x) \quad (7.5)$$

依旧把 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$ 叫做函数项级数的余项,于是有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x)=0 \quad (7.6)$$

首先,函数项级数在收敛时,它是函数的一种表示方法,这种表示方法可以更深刻地描述一个函数的性态,包括连续性、可微性等。并且,函数项级数和导数、积分与极限以及微分方程交叉起来,可以用来综合处理数学问题。

图 7.1 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的五阶级数图形。

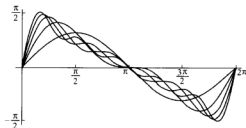


图 7.1 五阶级数图

7.2 幂级数

7.2.1 幂级数的基本概念

函数项级数中最简单最重要的一类级数就是幂级数,它的形式为

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad (7.7)$$

其中常数 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 叫做幂级数的系数, 幂级数在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义。

7.2.2 泰勒级数

若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某一邻域内有直到 $(n+1)$ 阶的导数 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$, 则余项为拉格朗日形式的泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (7.8)$$

这里余项 $R_n(x)$ 是

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\text{点 } \xi \text{ 在 } x_0, x \text{ 之间}) \quad (7.9)$$

现设在所讨论的区域内 $f(x)$ 具有各阶导数 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$, 并且余项 $R_n(x)$ 的极限为零

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (7.10)$$

这时把公式写成

$$f(x) - s_{n+1}(x) = R_n(x) \quad (7.11)$$

其中 $s_{n+1}(x)$ 表示下列级数 [式 (7.12)] 的前 $(n+1)$ 项的和。

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (7.12)$$

当 n 无限增大时, 可有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - s_{n+1}(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (7.13)$$

即

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}(x) \quad (7.14)$$

所以级数收敛于 $f(x)$ 。如此就可以把函数 $f(x)$ 展开为泰勒级数

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (7.15)$$

当 $x_0=0$ 时泰勒级数就成为下列特别重要的形式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (7.16)$$

它有时也叫麦克劳林级数。

现在有这样一个问题: 如果函数 $f(x)$ 能够表达为幂级数

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (7.17)$$

时, 这个级数是否与麦克劳林级数一致? 答案是肯定的。

如果函数能够展开为 x 的幂级数时, 则它的展开式是惟一的。

作为函数的幂级数的展开惟一性的应用, 下面讨论偶函数的展开式。假设

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

从而

$$f(x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots + (-1)^n a_nx^n + \dots \quad (7.18)$$

因为 $f(x) = f(-x)$, 由惟一性知这两级数的对应系数应当相同, 故得

$$a_1 = -a_1, \quad a_3 = -a_3, \quad \dots$$

即

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad \dots$$

因此, 偶函数的 $f(x)$ 的幂级数展开式中只含有 x 的偶次幂的项

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots \quad (7.19)$$

同理可得奇函数的展开式中只有 x 的奇次幂的项。

7.2.3 初等函数的展开式

(1) 直接方法

要把已经给出的函数展开为 x 的幂级数, 可以按以下步骤进行:

① 求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$, 如果在所讨论的点处某阶导数不存在, 就停止进行。例如 $x=0$ 处, $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 的三阶导数不存在, 它就不可能展开为 x 的幂级数。

② 求出函数及其各阶导数在 $x=0$ 的数值

$$f(0), f'(0), \dots, f^{(n)}(0), \dots$$

③ 求出幂级数

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

的收敛半径 R 。

④ 考察当 x, ξ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内是余项 $R_n(x)$ 的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (\text{点 } \xi \text{ 在 } 0, x \text{ 之间})$$

是不是为零。如果为零, 第③步求出的幂级数就是函数的展开式; 如果不为零, 幂级数虽然收敛, 但是它的和并不是所给的函数 $f(x)$ 。

(2) 其他方法

直接方法的最后步骤是要考察 $R_n(x)$ 是否趋近于零。但是研究余项即使在初等函数中也不是一件容易的事。幸好, 可以利用幂级数本身的性质, 例如两个幂级数可以相加、相减、相乘、相除以及一个收敛的幂级数可以逐项微分、逐项积分等, 可以直接研究余项而能够把所给定的函数展开, 又由于函数展开的惟一性, 这与直接方法所得的结果并无差异。

(3) 几种初等函数的麦克劳林展开

① 指数函数 e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty \quad (7.20)$$

② 正弦函数的展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty \quad (7.21)$$

③ 函数 $(1+x)^m$ 的展开式

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \quad |x| < 1 \quad (7.22)$$

7.2.4 欧拉公式

考察复数项级数

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (z = x + iy)$$

它在全部复平面上是绝对收敛的, 在 x 轴上 ($z=x$) 它表示指数函数 e^x , 在全部复平面上用它来定义一个复变量指数函数, 记作 e^z . 于是 e^z 的定义为

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots (|z| < \infty) \quad (7.23)$$

当 $x=0$, z 为虚部 iy , 式 (7.23) 成为

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(iy)^n + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{1}{2!}y^2 - i\frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + i\frac{1}{5!}y^5 - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots\right) + i\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

把 y 换作 x , 上式为

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (7.24)$$

这个就是欧拉公式。应用这个公式, 复数 z 可以表示为指数形式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (7.25)$$

其中 $r=|z|$ 称为 z 的模, $\theta=\arg z$ 称为 z 的辐角。

在式 (7.24) 中把 x 换作 $-x$, 又有

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

与式 (7.24) 相加与相减得

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases} \quad (7.26)$$

这也叫欧拉公式, 它使三角函数与指数函数之间建立了如此简单的关系。

利用幂级数的乘法, 可以验证

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad (7.27)$$

特殊地, 取 z_1 为实数 x , z_2 为纯虚数 iy , 则有

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (7.28)$$

就是说, 复变量的指数函数 e^z 在复平面上的每一点 $z=x+iy$ 处表示一个复数, 它的模是 e^x , 辐角为 y 。

7.3 傅里叶级数

自然界中周期现象的数学描述构成周期函数。傅里叶级数反映了一个周期函数可以分解为有限或无限多个不同频率的正弦 (或余弦) 信号之加权和这样的基本事实, 同时也说明了无限多个不同频率的正弦 (或余弦) 信号可以合成某一指定的周期信号, 这是经典频谱分析的理论基础, 也是现代图形与语言处理技术的基础之一。将一个周期函数展开为傅里叶级数的公式依赖于三角函数组的正交性。最简单的周期现象, 如单摆的摆动, 音叉的振动等, 都可用正弦函数和余弦函数表示, 其周期现象较为复杂。

7.3.1 傅里叶级数的概念

7.3.1.1 三角级数、三角函数系的正交性

所谓三角级数指的是形如式 (7.29) 的级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7.29)$$

其中 a_0, a_1, b_1, \dots 都是常数项。而开头 $2n+1$ 项的和

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (7.30)$$

叫做 n 级三角多项式。级数是否对于某些 x 的数值收敛, 如果收敛, 它的和是怎么样的函数, 这些问题当然与常数 a_0, a_1, b_1, \dots 有关。现假设级数在长度为 2π 的闭区间上例如在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛, 因 $\sin nx, \cos nx$ 的周期为 2π , 所以它对于任何实数 x 收敛, 于是这级数的和表示一个周期为 2π 而定义在全部数轴上的函数。因此, 只要讨论这级数在 $[-\pi, \pi]$ 上的性态, 其他部分就可以根据函数的周期性完全确定了。

下面的几个关系式 (设 m, n 是正整数) 是很容易证明的。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (7.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x}{2} dx = 0 (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2} dx = 0 (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(m-n)x + \sin(m+n)x}{2} dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

在三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

之中任意两个不同的函数的乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为零。具有这样性质的这个三角函数系就叫做在该区间上是正交的。

7.3.1.2 欧拉-傅里叶公式

设三角函数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于和 $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (7.34)$$

假定级数可以逐项积分 [例如当级数一致收敛于和 $f(x)$ 时], 并自 $-\pi$ 到 π 逐项积分, 就得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right] \quad (7.35)$$

根据上节公式, 可见等式右边除第一项外其余各项均为零, 于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \pi$$

即求得

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx \right] \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi \end{aligned}$$

即有

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

类似地, 用 $\sin nx$ 乘式 (7.35) 的两端, 再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分, 可得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

上面求出的 a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, 3, \dots$) 的表达式叫做欧拉-傅里叶公式。注意到当 $n=0$ 时, a_n 的表达式正好给出 a_0 , 如此归并之后, 得到结果可以写成

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.36)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.37)$$

7.3.1.3 傅里叶级数

现设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是可积分的函数, 于是公式 (7.30)、公式 (7.31) 内的积分存在, 它们定出的系数 a_n, b_n 叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶系数, 并且与之相对应的三角级数叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶级数。

收敛定理——狄利克雷充分条件 设

① 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只具有有限个第一类间断点 [一点 c 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点, 就是函数在该点的左极限 $f(c-0)$ 和右极限 $f(c+0)$ 存在但不相等, 或存在且相等但不等于 $f(c)$];

② 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只具有有限个极大点和极小点 (就是说可以把区间 $[-\pi, \pi]$ 分为有限个子区间, 使得函数在每个子区间上是单调的), 则由傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

所定出的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上收敛, 并且它的和:

① 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时, 等于 $f(x)$;

② 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时, 等于 $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$;

③ 当 x 为区间的端点时, 就是当 $x = -\pi$ 或 $x = \pi$ 时, 等于 $\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$ 。

首先注意到这个定理对于函数要求很宽, 只要求它在区间 $[-\pi, \pi]$ 上至多只具有有限个第一类间断点并且不作无限次振动时, 它就可以展开为收敛的傅里叶级数。实际上, 即使有无限次振动, 只要它的一阶导数连续或至多只有有限个第一类间断点时, 也能证明它可展开为傅里叶级数。因此, 凡可展开为幂级数的函数都可展开为收敛的傅里叶级数了。其次注意到级数若在区间 $[-\pi, \pi]$ 上收敛, 则当 x 取所有的实数时它也收敛, 并且级数的和以 2π 为周期重复它在区间 $[-\pi, \pi]$ 上所取的那些值。因此函数在区间 $[-\pi, \pi)$ 外应定义为以 2π 为周期的函数: $f(x+2n\pi) = f(x)$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ 。把 $f(x)$ 看作为如此延续的周期函数时, 若 $f(-\pi+0) \neq f(\pi-0)$, 就有 $f(\pi+0) \neq f(\pi-0)$ 及 $f(-\pi+0) \neq f(-\pi-0)$, 于是 $x = \pi$ 及 $x = -\pi$ 都是间断点。还注意到在间断点 x 处级数不是收敛于 $f(x)$ 而是收敛于函数在该点的左极限和右极限的算术中值。

7.3.2 傅里叶级数展开

7.3.2.1 偶函数及奇函数的傅里叶级数

设已给函数为偶函数或奇函数, 在求它的傅里叶级数时, 应用下面的定理就可减轻计算工作。

定理 当偶函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上展开为傅里叶级数时, 它的傅里叶级数 (包括 a_0) 为

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, b_n = 0 \quad (7.38)$$

而当奇函数 $f(x)$ 在该区间上展开为傅里叶级数时, 它的傅里叶级数 (包括 a_0) 为

$$a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (7.39)$$

这个定理的正确性在几何上是很明显的, 现在对第一部分加以证明, 至于第二部分可以同样处理。

设 $f(x)$ 为偶函数, 即 $f(-x) = f(x)$, 则有

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

在右边的第一个积分中以 $-x$ 代 x , 并记住 $\cos nx$ 也为偶函数, 然后对调积分的上下

限同时更换它的符号, 于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx (-dx) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(x) \sin(-nx) (-dx) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \end{aligned}$$

【例 1】展开函数

$f(x) = \begin{cases} -x & (-\pi \leq x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$ 为傅里叶级数 (图 7.2)。

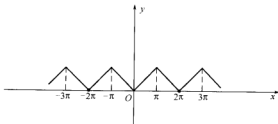


图 7.2 函数的傅里叶级数 (一)

解 首先, 该函数对应的傅里叶级数到处收敛于 $f(x)$; 其次, 这个函数是偶函数, 所以按照公式, 有 $b_n = 0$ 而 $a_0, a_n (n=1, 2, \dots)$ 为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

可见 a_2, a_4, a_6, \dots 为零, 而 $a_1 = -\frac{4}{\pi \times 1^2}, a_3 = -\frac{4}{\pi \times 3^2}, a_5 = -\frac{4}{\pi \times 5^2}, \dots$ 于是已给函数的傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right] \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

【例 2】展开函数

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

的傅里叶级数 (图 7.3)。

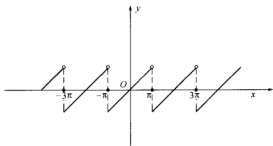


图 7.3 函数的傅里叶级数 (二)

解 这个函数满足收敛定理的条件, 但连续的周期函数在区间端点 $x = -\pi$ 及 $x = \pi$ 处为不连续, 故所对应的傅里叶级数当 $-\pi < x < \pi$ 时收敛于和 $f(x)$, 而在端点时收敛于和

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

而这个函数是奇函数, 所以按照公式 $a_n = 0$, 而 b_n 为

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

于是, 已给函数的傅里叶级数为

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \cdots \right) \quad (-\pi < x < \pi)$$

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 就得到关系式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

7.3.2.2 函数展开为正弦或余弦级数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上有定义并能满足收敛定理的条件。现在要把函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上展开成含正弦项或只含余弦项的傅里叶级数。

若在区间 $[-\pi, 0]$ 上补充函数 $f(x)$ 的定义, 使它在整个区间 $[-\pi, \pi]$ 上为奇函数; 从几何上来说, 就是函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, 0]$ 上的图形与原来函数在 $[0, \pi]$ 上的图形关于原点对称的。于是可应用前节定理中的公式 (7.39) 计算傅里叶系数, 从而 $f(x)$ 的傅里叶级数是正弦级数。

若在区间 $[-\pi, 0]$ 上补充函数 $f(x)$ 的定义, 使它在整个区间 $[-\pi, \pi]$ 上为偶

函数:从几何上来说,就是函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, 0]$ 上的图形与原来函数在 $[0, \pi]$ 上的图形关于纵坐标是对称的。于是可应用前节定理中的公式 (7.38) 计算傅里叶系数,从而 $f(x)$ 的傅里叶级数是余弦级数。

【例 3】 设

$$f(x) = x+1 \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

试分别展开为正弦级数 (图 7.4) 和余弦级数 (图 7.5)。

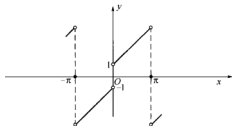


图 7.4 函数的正弦级数

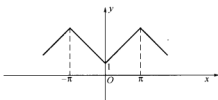


图 7.5 函数的余弦级数 (一)

解 先求正弦级数,按照公式 $a_n=0$ 而 b_n 为

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n} (1 - \pi \cos n\pi - \cos n\pi) \end{aligned}$$

于是

$$x+1 = \frac{2}{\pi} \left[(\pi+2) \sin x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} (\pi+2) \sin 3x - \frac{\pi}{4} \sin 4x + \cdots \right] \quad (0 < x < \pi)$$

在端点 $x=0, x=\pi$, 级数之和显然为零,但不能代表原来函数 $f(x)$ 的值。

再求余弦级数,按照公式, $b_n=0$ 而 a_0, a_n 为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{\pi} = \pi + 2 \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

于是

$$x+1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

7.3.2.3 任意区间上的傅里叶级数

直到现在为止,讨论都限制于在区间 $[-\pi, \pi]$ 或区间 $[0, \pi]$ 上满足收敛条件的函数 $f(x)$ 。如果所给函数 $f(x)$ 在区间 $[-l, l]$ 或 $[0, l]$ 上满足收敛条件,那么函数 $f(x)$ 所对应的傅里叶级数或正弦级数及余弦级数的形式,是不难作一简单变量代换而得出的。为了引用方便起见,把这些结果叙述成为下面的定理。

定理 在区间 $[-l, l]$ 上满足收敛条件的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数的形式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中系数 a_n, b_n 为

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

在区间 $[0, l]$ 上函数 $f(x)$ 的正弦级数的形式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其中系数 b_n 为

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

又在区间 $[0, l]$ 上函数 $f(x)$ 的余弦级数形式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

其中系数 a_n 为

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

实际上, 作变量代换 $z = \frac{\pi x}{l}$, 于是区间 $-l \leq x \leq l$ 就变换成 $-\pi \leq z \leq \pi$. 设函数

$f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = F(z)$, 从而 $F(z)$ 是定义在 $-\pi \leq z \leq \pi$ 上且满足收敛条件的函数。把 $F(z)$ 展开成

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \cos nz dz, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \sin nz dz$$

在以上的式子中令 $z = \frac{\pi x}{l}$, 并注意到 $F(z) = f(x)$, 于是有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

而且

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

定理其余部分仿此可证, 不在赘述。

【例 4】展开函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-2 \leq x \leq 0) \\ k & (0 < x \leq 2) \end{cases} \quad (\text{常数 } k \neq 0)$$

为傅里叶级数 (图 7.6)。

解 这时 $l=2$, 由公式得到

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^2 k dx = k$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 k \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \left[\frac{k}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 k \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \left[-\frac{k}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = \frac{k}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{k}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

于是

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\sin \frac{\pi k}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi k}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi k}{2} + \cdots \right) \quad (-2 < x < 0, 0 < x < 2)$$

【例 5】展开函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \frac{a}{2}) \\ -1 & (\frac{a}{2} < x < a) \end{cases}$$

为余弦级数 (图 7.7)。

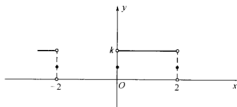


图 7.6 函数的傅里叶级数 (三)

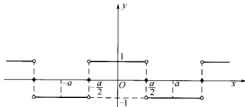


图 7.7 函数的余弦级数 (二)

解 这时 $l=a$

$$a_0 = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} 1 \cdot dx + \frac{2}{a} \int_{\frac{a}{2}}^a (-1) \cdot dx = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{a} dx + \frac{2}{a} \int_{\frac{a}{2}}^a (-1) \cos \frac{n\pi x}{a} dx = \left[\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{a} \right]_0^{\frac{a}{2}} - \left[\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{a} \right]_{\frac{a}{2}}^a \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

代入公式有

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{a} - \cdots \right) \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}, \frac{a}{2} < x < a \right)$$

特别是, 在开区间 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ 内常数 1 的展开式为

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{a} - \dots \right)$$

7.3.3 傅里叶级数的应用

7.3.3.1 基本图形的傅里叶展开式

节奏意味着有规律地重复出现，是一个有秩序的进程。应用傅里叶级数建立起一定的节奏，能够描绘出几何图形，预见其连续出现的规律。

举例如下。

设 $f(x)$ 给定为：对于 $0 < x < \pi$, $f(x) = 1$ ；对于 $\pi < x < 2\pi$, $f(x) = -1$ ； $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 在跳跃点上，设 $f(0) = f(k\pi) = 0$ 。

欧拉-傅里叶公式中的积分得出对于所有的 n , $a_n = 0$, 又 $b_{2n} = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 以及当 $n = 0, 1, 2, \dots$ 时, $b_{2n+1} = 4/[\pi(2n+1)]$ 。

傅里叶级数为 $f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$ 。

① 第一类矩形脉冲 (图 7.8)

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left(\frac{\cos b}{1} \sin x + \frac{\cos 3b}{3} \sin 3x + \frac{\cos 5b}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

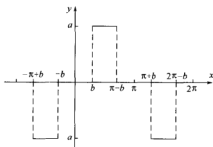


图 7.8 第一类矩形脉冲

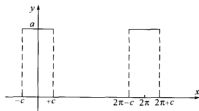


图 7.9 第二类矩形脉冲

② 第二类矩形脉冲 (图 7.9)

$$f(x) = \frac{2a}{\pi} \left(\frac{c}{2} + \frac{\sin c}{1} \cos x + \frac{\sin 2c}{2} \cos 2x + \frac{\sin 3c}{3} \cos 3x + \dots \right)$$

③ 矩形曲线 (图 7.10)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \dots = 0$$

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots + \dots \right)$$

④ 锯齿形曲线 (图 7.11)

$$f(0) = f(2\pi) = \dots = 0$$

$$f(x) = -\frac{2a}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$$

⑤ 三角形曲线 (图 7.12)

$$f(x) = \frac{8a}{\pi^2} \left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots + \dots \right)$$

⑥ 三角形脉冲 (图 7.13)

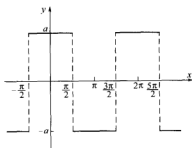


图 7.10 矩形曲线

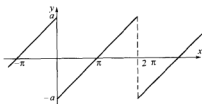


图 7.11 锯齿形曲线

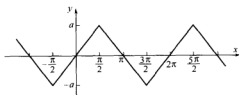


图 7.12 三角形曲线

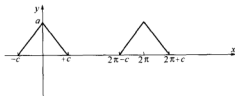


图 7.13 三角形脉冲

$$f(x) = \frac{ac}{2\pi} + \frac{2a}{\pi^2} \left(\frac{1 - \cos c}{1^2} \cos x + \frac{1 - \cos 2c}{2^2} \cos 2x + \frac{1 - \cos 3c}{3^2} \cos 3x + \dots \right)$$

⑦ 单向整流的交流电，余弦曲线半波（图 7.14）

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos x + \frac{2}{13} \cos 2x - \frac{2}{35} \cos 4x + \frac{2}{57} \cos 6x - \dots + \dots \right)$$

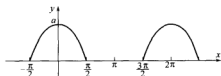


图 7.14 余弦曲线半波



图 7.15 双向整流的交流电

⑧ 双向整流的交流电（图 7.15）

$$f(x) = |\cos x|$$

$$f(x) = \frac{2a}{\pi} \left(1 + \frac{2}{13} \cos 2x - \frac{2}{35} \cos 4x + \frac{2}{57} \cos 6x - \dots + \dots \right)$$

7.3.3.2 函数傅里叶展开的图形

(1) 区间变换形成的周期图形

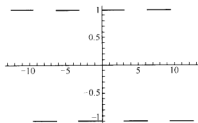
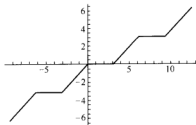
【例 6】以 2π 为周期的矩形脉冲波形（图 7.16）。

【例 7】以 2π 为周期的函数图形（图 7.17）。

(2) 由简单到复杂的傅里叶级数展开

【例 8】在 $[-\pi, \pi]$ 上展开函数 $f(x) = x$ 为傅里叶级数。

解 $a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2 \times (-1)^{n-1}}{n}$

图 7.16 以 2π 为周期的矩形脉冲波形图 7.17 以 2π 为周期的函数图形

于是, $f(x)$ 的傅里叶展开式为 $f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}$.

如图 7.18 所示, $f(x)$ 的 1~5 阶傅里叶展开形式如下

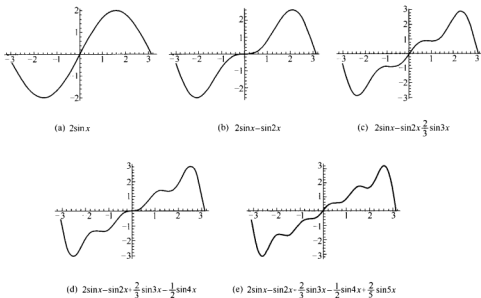


图 7.18 1~5 阶傅里叶展开图形

函数 $f(x)=x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数图形如图 7.19。

如图 7.20 所示, n 越大, 展开式越接近于函数 $f(x)$ 。

把函数 $f(x)=x$ 分别在 $[-3\pi, -\pi]$, $[\pi, 3\pi]$ 区间进行傅里叶展开, 如图 7.21。

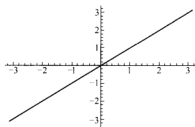
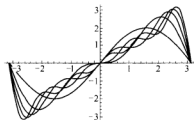
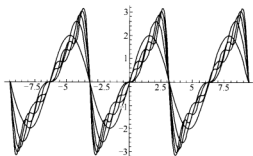
(3) 由单条到多条曲线的傅里叶级数展开

【例 9】 将函数 $g(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ 展开为傅里叶级数。

解 函数 $g(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上是奇函数, 有

$$a_n = 0$$

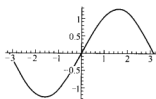
$$b_n = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n]$$

图 7.19 函数 $f(x)=x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数图形图 7.20 随 n 变化的傅里叶展开图 7.21 函数 $f(x)=x$ 的傅里叶展开

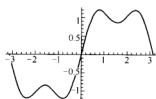
于是
$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$$

如图 7.22 所示, $g(x)$ 的 1~5 阶傅里叶展开式如下:

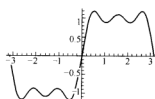
① $\frac{4}{\pi} \sin x$ [图 7.22 (a)];



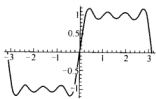
(a)



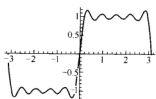
(b)



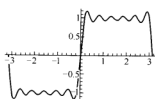
(c)



(d)



(e)



(f)

图 7.22 函数 $g(x)$ 的傅里叶展开

$$\textcircled{2} \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right) \quad [\text{图 7.22 (b)}];$$

$$\textcircled{3} \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right) \quad [\text{图 7.22 (c)}];$$

$$\textcircled{4} \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} \right) \quad [\text{图 7.22 (d)}];$$

$$\textcircled{5} \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} \right) \quad [\text{图 7.22 (e)}];$$

$$\textcircled{6} \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 11x}{11} \right) \quad [\text{图 7.22 (f)}].$$

在物理上不同频率的正弦波逐个叠加,由以上图形和叠加式子可以看出,一个比较复杂的周期运动可以看作许多不同频率的简谐振动的叠加。在艺术生成设计上,表现为具有周期和节奏性的图形,以上图形单个来看都具有平面构成元素,如果把它们进行叠加、组合、变形处理,这些看似简单的图形就能变成丰富的平面构成形式。

把函数展开成傅里叶级数,以五阶为例, $\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 11x}{11} \right)$, 在 $(-\pi, \pi)$ 区间的曲线,同在 $(-3\pi, -\pi)$ 区间的曲线形式是一样的,同理在 $(\pi, 3\pi)$ 上也是一样的,以五阶为例可以生成 $(-3\pi, 3\pi)$ 周期函数图形(图 7.23)。

由此可以把函数展开成傅里叶级数,从一阶到五阶的收敛图形都是周期图形(图 7.24)。

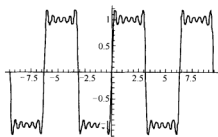


图 7.23 以五阶为例生成的
 $(-3\pi, 3\pi)$ 周期函数

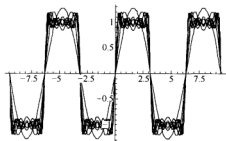


图 7.24 展开成傅里叶级数的函数

(4) 多个函数的叠加

对函数 $f(x)=x$ 分别在 $[-3\pi, -\pi]$, $[-\pi, \pi]$, $[\pi, 3\pi]$ 区间进行傅里叶展开,结果如图 7.25。

对函数 $f(x)=x$ 分别在 $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$ 区间进行傅里叶展开,结果如图 7.26。

如图 7.27 所示,把两个函数进行叠加。

傅里叶函数 $2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x$ 图形变换(图 7.28)。

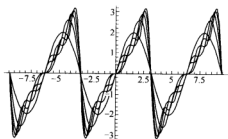


图 7.25 函数 $f(x)=x$ 在特定区间的傅里叶展开 (一)

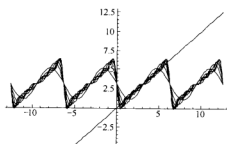


图 7.26 函数 $f(x)=x$ 在特定区间的傅里叶展开 (二)

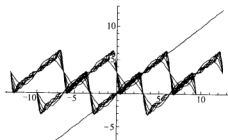


图 7.27 函数 $f(x)=x$ 在特定区间的傅里叶展开的叠加

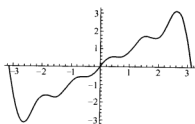


图 7.28 傅里叶函数 $2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x$ 图形变换

(5) 傅里叶级数在设计中的应用 (图 7.29~图 7.42)

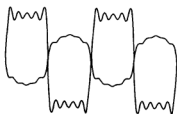


图 7.29 傅里叶级数图形 (一) (李响)

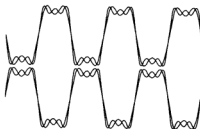


图 7.30 傅里叶级数图形 (二) (李响)

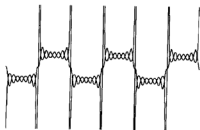


图 7.31 傅里叶级数图形 (三) (李响)

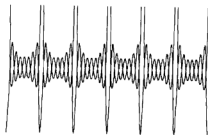


图 7.32 傅里叶级数图形 (四) (李响)

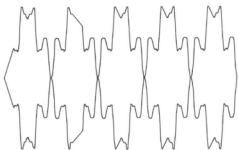


图 7.33 傅里叶级数图形 (五) (李响)



图 7.34 傅里叶级数与纹样 (李响)

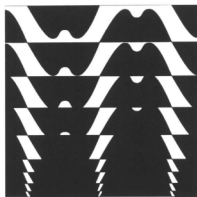


图 7.35 傅里叶的节奏构成 (一) (李响)



图 7.36 傅里叶的节奏构成 (二) (李响)

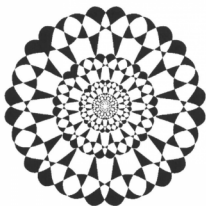


图 7.37 级数的发射构成 (李响)

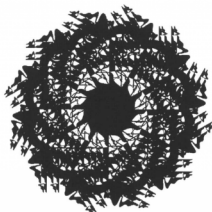


图 7.38 滚动的车轮 (苟双晓)

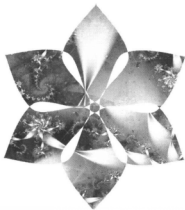


图 7.39 奇异花 (苟双晓)

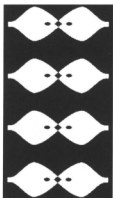


图 7.40 鱼戏 (苟双晓)



图 7.41 宝塔 (苟双晓)



图 7.42 包装盒 (苟双晓)

7.4 小结

① 三角级数 (主要是傅里叶级数) 的理论不仅在分析函数方面起过很大作用, 还有许多数学概念来自三角级数, 因此一直是现代数学的一个重要分支。

② 泰勒定理指出, 任何函数只要存在 n 阶导数, 就能进行幂级数的泰勒展开。

③ 欧拉公式揭开了指数函数与三角函数 (周期函数) 的关系, 在数学发展史上是一件惊人的大事, 影响深远。

④ 傅里叶级数进行周期函数的调和分析与调和综合, 可应用来研究设计艺术中的节奏与韵律。

⑤ 傅里叶级数及其表现出的节奏韵律美为设计艺术的形式规则探讨作出了有益的数理阐释, 体现了设计艺术的内在数理知识, 使美的节奏有了数理基础。

第8章

矩阵与图形变换



- 矩阵基础知识
- 图形变换
- 图形变换在设计中的应用
- 小结

矩阵理论是线性代数的重要组成部分，矩阵的概念与运算法则是研究近代数学和造型艺术不可缺少的工具，应用矩阵理论可以对线性方程组的解法及其理论进行研究，并对几何图形进行空间变换。

任何一个物体都可以看作是一定数量的点按一定规律排列的集合，都可以用一定的图形来表示，研究空间物体与表示其图形之间的联系，可以归结为研究物体上任意一点的坐标与该物体图形上对应点坐标之间的联系。这种坐标之间的联系及其坐标变换即为图形变换。无论是二维图形还是三维图形，都可以根据需要，通过某种变换而形成新的图形。这些变换可以是图形的比例变化、旋转变换和平移变换，也可以是错切和对称变换，既包括二维变换、三维变换，也包括投影变换（平行投影变换和透视投影变换）。图形的这些变换都可以用矩阵方法来表现，图形变换的矩阵方法是图形数字化处理的最佳方式，也是计算机绘图的数学基础和重要手段。具备进行图形变换的矩阵知识无论对于掌握计算机图形学，还是分析设计中的图形关系，都有极其重要的价值。

8.1 矩阵基础知识

(1) 构成图形的基本要素及表示方法

体由若干面构成，而面则由线组成，点的运动轨迹便是线。因此，构成图形的最基本要素是点。

在解析几何中，点可以用向量表示。在二维空间中可用 (x, y) 表示平面上的一点，在三维空间里则用 (x, y, z) 表示空间一点。既然构成图形的最基本要素是点，则可用点的集合（简称点集）来表示一个平面图形或三维立体，写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}_{n \times 2}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}_{n \times 3}$$

这样便建立了平面图形和空间立体的数学模型。

(2) 点的变换

在计算机绘图中,常常要进行诸如比例、对称、旋转、平移、投影等各种变换,既然图形可以用点集来表示,也就是说点集确定了,则图形也就确定了,那么,如果点的位置改变了,图形也就随之改变。因此,要对图形进行变换,只要变换点就可以了。

由于点集可用矩阵的方式来表达,因此对点的变换可以通过相应的矩阵运算来实现,即

$$\text{旧点 (集)} \times \text{变换矩阵} \xrightarrow{\text{矩阵运算}} \text{新点 (集)}$$

8.1.1 矩阵的概念

8.1.1.1 矩阵的定义

图 8.1 所示的物体空间点坐标按顺序排列,可写成用方括号括起来的数表形式,即

$$A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

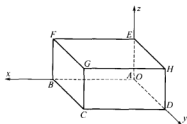


图 8.1 立体

数学上将这种按一定顺序排列的数表称为矩阵,

其中横排称为行,竖排称为列,矩阵中每一个数称为矩阵元素。矩阵与行列式在形式上相似,但两者的含义完全不同。行列式表示一个数,矩阵表示一组有序的数。 $m \times n$ 个数 a_{ij} 按一定规则 ($i=1, 2, 3, \dots, m; j=1, 2, 3, \dots, n$) 排成 m 行 n 列,即成一矩阵。矩阵可用任意字母 (如 A) 表示,于是有

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

其中构成矩阵 A 的任意个元素 a_{ij} 称为矩阵 A 第 i 行第 j 列元素。

行数 $m=1$ 的矩阵称为行矩阵或行向量,即

$$A = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}] \quad (8.2)$$

列数 $n=1$ 的矩阵称为列矩阵或列向量,即

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

8.1.1.2 n 阶方阵

行数和列数相等的矩阵称为方阵。如

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

为 n 阶方阵。方阵中元素 $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ 为主对角线元素；元素 $b_{1n}, b_{2n-1}, \dots, b_{n1}$ 为次对角线元素。

8.1.1.3 对角线方阵

除主对角线元素外，其余元素为 0 的方阵称为对角线方阵或对角方阵。例如

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8.1.1.4 单位方阵

对角方阵中，主对角线元素均为 1 的矩阵称为单位方阵，一般用 I 表示。例如

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

任何一个矩阵乘以单位方阵的结果不变，仍为原来矩阵。

8.1.1.5 子矩阵

将一个矩阵分成若干低阶矩阵，则这些低阶矩阵称为原矩阵的子矩阵。例如

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

其中 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 均为矩阵 A 的子矩阵。其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 的二阶子矩阵；

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 的 2×1 阶子矩阵；

$$A_{21} = [a_{31} \quad a_{32}]$$

为矩阵 A 的 1×2 阶子矩阵；

$$A_{22} = [a_{33}]$$

为矩阵 A 的一阶子矩阵。

8.1.1.6 转置矩阵

矩阵 A 的行和列互换位置，就得到转置矩阵，以 A^T 表示。所以 m 行 n 列矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

的转置矩阵为 n 行 m 列矩阵, 即

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

8.1.1.7 逆矩阵

对 n 阶方阵 A , 若有一个 n 阶方阵 B 能满足 $A \cdot B = B \cdot A = I$ (单位矩阵), 则 B 称为 A 的逆矩阵, 记作 A^{-1} 。此时, A 也可称为 B 的逆矩阵, 并记作 B^{-1} 。

8.1.2 矩阵的运算

8.1.2.1 矩阵的加减运算

矩阵 A 和矩阵 B 的行数和列数相同, 将其对应元素相加 (或相减) 之后所组成的同行数同列数的新矩阵 C , 称为 A 与 B 之和 (或差), 记作 $A+B=C$ (或 $A-B=C$)。例如

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \pm B = C = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$$

8.1.2.2 数与矩阵相乘

数 k 与矩阵 A 相乘, 则 k 与矩阵中每一个元素都相乘, 可用 kA 或 Ak 表示。例如

$$k \cdot A = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

零乘任何矩阵都将得到所有元素为零的矩阵, 称之为零阵。

8.1.2.3 两矩阵相乘

矩阵相乘是图形变换中经常利用的矩阵运算。若矩阵 A 和矩阵 B 相乘得新矩阵 C , 则矩阵 C 中的第 i 行第 j 列元素, 等于矩阵 A 中第 i 行各列元素分别与矩阵 B 中第 j 列相应行元素相乘之和。两矩阵进行相乘运算的条件是第一个矩阵 A 中的列数必须等于第二个矩阵 B 的行数。如果 A 矩阵中行数为 m_1 , 列数为 n_1 , 称 A 矩阵为 $m_1 \times n_1$ 阶矩阵; 同样 B 矩阵中行数为 m_2 , 列数为 n_2 , 称 B 矩阵为 $m_2 \times n_2$ 阶矩阵。 A 和 B 两矩阵相乘, 必须是 $n_1 = m_2$, 产生的新矩阵 C 为 $m_1 \times n_2$ 阶。例如, 一个 3×2 阶矩阵 A 乘以一个 2×3 阶矩阵 B , 产生一个 3×3 阶方阵 C 。即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{bmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$, 也就是说矩阵乘法运算不满足交换律。

8.2 图形变换

8.2.1 二维图形变换

8.2.1.1 二维基本变换

点的变换可以通过矩阵运算来实现, 令: $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 称它为变换矩阵, 则有

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

这里, $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ 为变换前点的坐标, $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$ 为变换后点的坐标。变换矩阵中 a, b, c, d 的不同取值, 可以实现各种不同变换, 从而达到对图形进行变换的目的。

比例变换

在变换矩阵 $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 中, 令 $b=c=0$, 则为比例变换矩阵: $T_s = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ ($a \neq 0, d \neq 0$)

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

其中, a, d 分别为 x, y 方向上的比例因子 ($a, d > 0$)。

- ① 若 $a=d=1$, 为恒等变换, 即变换后点的坐标不变。
- ② 若 $a=d \neq 1$, 为等比变换, 变换结果是图形等比例放大 ($a=d>1$) 或等比例缩小 ($a=d<1$)。

- ③ 若 $a \neq d$, 则变换结果是图形产生畸变。

对称变换

(1) 对坐标轴的对称变换

① 对 x 轴对称

点对 x 轴对称应有 $x'=x, y'=-y$, 则变换矩阵为 $T_{mx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 即

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

② 对 y 轴对称

点对 y 轴对称应有 $x'=-x, y'=y$, 则变换矩阵为 $T_{my} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 即

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

(2) 对坐标原点对称变换

点对坐标原点对称应有: $x'=-x, y'=-y$, 则变换矩阵为 $T_m = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 对点

进行变换

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

(3) 对 45° 线的对称变换

① 对 $+45^\circ$ 线的对称变换

点对 $+45^\circ$ 线对称, 应有: $x' = y$, $y' = x$, 则变换矩阵为 $T_{m,+45} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 对 $+45^\circ$ 线的对称变换为

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

② 对 -45° 线的对称变换

若点对 -45° 线对称, 应有: $x' = -y$, $y' = -x$, 则变换矩阵为 $T_{m,-45} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, 即

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

错切变换

令 $T = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$, 且 c, b 之一为 0, 则

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+cy & bx+y \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

(1) 沿 x 向错切

令 $b=0$, 沿 x 向错切变换矩阵为 $T_{sx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+cy & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (c \neq 0) \quad (8.17)$$

(2) 沿 y 向错切

令 $c=0$, 沿 y 向错切变换矩阵为 $T_{sy} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & bx+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (b \neq 0) \quad (8.18)$$

需要注意的是, 上述的错切方向均是指第 I 象限的点而言, 其余象限的点的错切方向应作相应的改变。

旋转变换

在二维空间里, 作如下规定: 图形的旋转是指绕坐标原点旋转 θ 角, 且逆时针为正, 顺时针为负, 变换矩阵为

$$T_r = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

对点进行旋转变换

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta & x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

平移变换与齐次坐标

上述 4 种变换都可以通过变换矩阵 $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 来实现, 若实现平移变换, 变换前后的坐标必须满足下面的关系

$$\begin{cases} x' = x + \Delta x \\ y' = y + \Delta y \end{cases} \quad (8.20)$$

这里 $\Delta x, \Delta y$ 是平移量, 应为常数, 但是应用上述的变换矩阵对点进行变换

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy & bx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$$

而这里的 cy, bx 均非常量, 因此用原来的 2×2 的变换矩阵是无法实现平移变换的。把 2×2 矩阵扩充为 3×2 矩阵, 即令

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ l & m \end{bmatrix}$$

但这样又带来新的问题, 二维图形的点集矩阵是 $n \times 2$ 阶的, 而变换矩阵是 3×2 阶的, 根据矩阵乘法规则, 它们是无法相乘的。为此, 把点向量也作扩充, 将 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ 扩充为 $\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$, 即把点集矩阵扩充为 $n \times 3$ 阶矩阵。这样, 点集矩阵与变换矩阵即可进行乘法运算

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ l & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy + l & bx + dy + m \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

平移变换矩阵

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l & m \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

对点进行平移变换

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + l & y + m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

这里 l, m 分别为 x, y 方向的平移量。

为使二维变换矩阵具有更多的功能, 可将 3×2 变换矩阵进一步扩充为 3×3 阶矩阵, 即

$$T = \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

则平移变换矩阵为

$$T_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & m & 1 \end{bmatrix} \quad (8.25)$$

对点进行平移变换

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+l & y+m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

在平移变换中, 将 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ 扩充为 $\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$, 实际上是由二维向量变为三维向量, 但 $\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$ 可以看作是 $z=1$ 平面上的点, 也就是说, 经此扩充后, 图形落在了 $z=1$ 平面上, 它对图形的形状没有影响。

这种用三维向量表示二维向量的方法叫做齐次坐标法。进一步推广, 用 $n+1$ 维向量表示 n 维向量的方法称之为齐次坐标法。

小结

至此, 已经介绍了 5 种基本变换, 它们都可以用二维图形变换矩阵的一般表达式

$$T = \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$$

变换而成, 现总结一下该 3×3 矩阵中各元素的功能, 把它分成四块

$$T = \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$$

其中 2×2 阶矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可以实现图形的比例、对称、错切、旋转等基本变换; 1×2 阶矩阵 $\begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix}$ 可以实现图形的平移变换; 2×1 阶矩阵 $\begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}^T$ 可以实现图形的透视变换; 而 $\begin{bmatrix} s \end{bmatrix}$ 可以实现图形的全比例变换。

表 8.1 列出二维图形的基本变换矩阵。

表 8.1 二维图形的基本变换矩阵

变换矩阵名称	变换矩阵	矩阵元素的意义及说明
比例变换	$T_s = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	a — x 方向上的比例因子 b — y 方向上的比例因子
全比例变换	$T_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$	s —全图的比例因子
对称变换	$T_{sx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	对 x 轴对称
	$T_{sy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	对 y 轴对称

变换矩阵名称	变换矩阵	矩阵元素的意义及说明
对称变换	$T_{m,+45} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	对+45°对称
	$T_{m,-45} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	对-45°对称
	$T_{m0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	对坐标原点对称
错切变换	$T_{sx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	沿 x 向错切 c —错切量, $c \neq 0$
	$T_{sy} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	沿 y 向错切 b —错切量, $b \neq 0$
旋转变换	$T_r = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	θ —旋转角, 逆时针为正, 顺时针为负
平移变换	$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & m & 1 \end{bmatrix}$	l — x 方向上的平移量 m — y 方向上的平移量

8.2.1.2 二维组合变换

上述的5种变换可用统一的变换矩阵形式来实现, 把它们叫做基本变换。但是, 有些变换仅用一种基本变换是不能实现的, 必须由两种或多种基本变换组合才能实现。这种由多种基本变换组合而成的变换称之为组合变换, 相应的变换矩阵叫做组合变换矩阵。

(1) 绕任意点旋转变换

平面图形绕任意点 $p(x_p, y_p)$ 旋转 α 角, 需要通过以下几个步骤来实现。

① 将旋转中心平移到原点, 变换矩阵为

$$T_{t1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix}$$

② 将图形绕坐标系原点旋转 α 角, 变换矩阵为

$$T_{r2} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

③ 将旋转中心平移回到原来的位置, 变换矩阵为

$$T_{t3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}$$

因此, 绕任意点 p 的旋转变换矩阵为

$$T = T_{11} T_{12} T_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}$$

展开得

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ x_p(1 - \cos \alpha) + y_p \sin \alpha & -x_p \sin \alpha + y_p(1 - \cos \alpha) & 1 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

显然, 当 $x_p=0$, $y_p=0$ 时, 即为对原点的旋转变换矩阵。

(2) 对任意直线的对称变换

如图 8.2 所示, 设任意直线的方程为: $Ax + By + C = 0$, 直线在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 $-C/A$ 和 $-C/B$, 直线与 x 轴的夹角为 α , $\alpha = \arctan(-A/B)$ 。

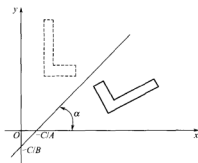


图 8.2 对称变换

对任意直线的对称变换由以下几个步骤来完成。

① 平移直线, 使其通过原点 (可以沿 x 向或 y 向平移, 这里沿 x 向将直线平移到原点), 变换矩阵为

$$T_{1t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C/A & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

② 绕原点旋转, 使直线与某坐标轴重合 (这里以与 x 轴重合为例), 变换矩阵为

$$T_{2r} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) & 0 \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

③ 对坐标轴对称变换 (这里是对 x 轴), 其变换矩阵为

$$T_{3m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

④ 绕原点旋转, 使直线回到原来与 x 轴成 α 角的位置, 变换矩阵为

$$T_{4r} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⑤ 平移直线, 使其回到原来的位置, 变换矩阵为

$$T_{5t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -C/A & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通过以上 5 个步骤, 即可实现图形对任意直线的对称变换。其组合变换矩阵为

$$T = T_{1t} T_{2r} T_{3m} T_{4r} T_{5t} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ (\cos 2\alpha - 1)C/A & (\sin 2\alpha)C/A & 1 \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

(3) 组合变换顺序对图形的影响

复杂变换通过基本变换的组合而成, 由于矩阵的乘法不适用于交换律, 即: $A \cdot B \neq B \cdot A$, 因此, 组合的顺序一般是不能颠倒的, 顺序不同, 则变换的结果亦不同。

8.2.2 三维图形变换

8.2.2.1 三维基本变换矩阵

(1) 变换矩阵

三维图形的变换是二维图形变换的简单扩展, 变换的原理还是把齐次坐标点 $(x, y, z, 1)$ 通过变换矩阵变换成新的齐次坐标点 $(x', y', z', 1)$ 。

在三维空间里, 用四维齐次坐标 $[x \ y \ z \ 1]$ 表示三维点, 三维变换矩阵则用 4×4 阶矩阵表示, 即

$$[x \ y \ z \ 1]T = [x' \ y' \ z' \ 1]$$

其中 T 为三维基本变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

可以把三维基本变换矩阵划分为四块, 其中

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{产生比例、对称、错切、旋转等基本}$$

变换。

$$[l \ m \ n]_{1 \times 3} \quad \text{产生平移变换。}$$

$$[p \ q \ r]_{3 \times 1}^T \quad \text{产生透视变换。}$$

$$[s] \quad \text{产生全比例变换。}$$

(2) 坐标系

在三维变换中, 采用右手坐标系, 习惯上人们一般采用图 8.3 的右手坐标系, 且规定, 物体绕各坐标轴旋转的正方向为右手螺旋方向。

但在绘图机上的坐标系是如图 8.4 的方式, 而采用图 8.3 的右手坐标系, 在投影变换中其投影面坐标系如

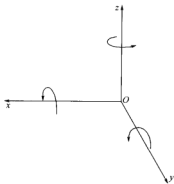


图 8.3 右手坐标系

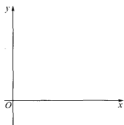


图 8.4 绘图机坐标系

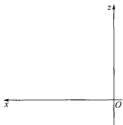


图 8.5 投影面坐标系

图 8.5 所示。

可见，两者的坐标系不统一，为此，采取这样的解决方法：给投影变换后的 x 坐标前冠以负号作为画图时的 x 坐标，以投影变换后的 z 坐标作为画图时的 y 坐标，这样就不会出错了。

8.2.2.2 三维基本变换

比例变换

三维基本变换矩阵左上角的 3×3 矩阵的主对角线上的元素 a, e, j 的作用是使物体产生比例变换。

比例变换矩阵为

$$T_s = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

其中 a, e, j 分别为沿 x, y, z 轴方向的比例因子。

对点进行比例变换

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} T_s = \begin{bmatrix} ax & ey & jz & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix}$$

对称变换

三维对称变换包括对原点、对坐标轴和对坐标平面的变换，常用的是对坐标平面的变换，现对此加以讨论。

(1) 对 xOy 平面的对称变换

变换矩阵

$$T_{m,xOy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

变换后点的坐标

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} T_{m,xOy} = \begin{bmatrix} x & y & -z & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 对 xOz 平面的对称变换

变换矩阵为

$$T_{m,xOz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

变换后点的坐标

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1] T_{m,xOz} = [x \ -y \ z \ 1]$$

(3) 对 yOz 平面的对称变换

变换矩阵为

$$T_{m,yOz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

变换后点的坐标

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1] T_{m,yOz} = [-x \ y \ z \ 1]$$

错切变换

错切变换是指三维立体沿 x, y, z 三个方向产生错切, 错切变换是画斜轴测图的基础, 其变换矩阵为

$$T_h = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

$[x \ y \ z \ 1] T_h = [x+dy+hz \ bx+y+iz \ cx+fz+z \ 1] = [x' \ y' \ z' \ 1]$
由变换结果看出, 一个坐标的变化受另外两个坐标变化的影响。

(1) 沿 x 含 y 错切

变换矩阵

$$T_{h,x(y)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

错切变换

$$[x \ y \ z \ 1] T_{h,x(y)} = [x+dy \ y \ z \ 1] = [x' \ y' \ z' \ 1]$$

(2) 沿 x 含 z 错切

变换矩阵

$$T_{h,x(z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

错切变换

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} T_{sh,x(z)} = \begin{bmatrix} x+hz & y & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 沿 y 含 x 错切

变换矩阵

$$T_{sh,y(x)} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

错切变换

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} T_{sh,y(x)} = \begin{bmatrix} x & y+bx & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 沿 y 含 z 错切

变换矩阵

$$T_{sh,y(z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

错切变换

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} T_{sh,y(z)} = \begin{bmatrix} x & y+iz & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix}$$

(5) 沿 z 含 x 错切

变换矩阵

$$T_{sh,z(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

错切变换

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} T_{sh,z(x)} = \begin{bmatrix} x & y & z+cx & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix}$$

(6) 沿 z 含 y 错切

变换矩阵

$$T_{sh,z(y)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.40)$$

错切变换

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} T_{sh,z(y)} = \begin{bmatrix} x & y & z+fy & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix}$$

旋转变换

与二维旋转变换类似, 三维旋转变换可分为绕坐标轴旋转变换和绕任意轴旋转变换。

三维旋转变换要比二维旋转变换复杂得多, 但方法是相似的, 三维旋转变换可以看作是三个二维旋转变换, 且旋转轴分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴。

(1) 绕 x 轴旋转 α 角

变换矩阵为

$$T_{rx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

(2) 绕 y 轴旋转 β 角
变换矩阵为

$$T_{ry} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.42)$$

(3) 绕 z 轴旋转 γ 角
变换矩阵为

$$T_{rz} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.43)$$

8.2.2.3 三维基本变换矩阵的组合

与二维组合变换一样，通过对三维基本变换矩阵的组合，可以实现对三维物体的复杂变换。

作为一个例子，现用三维组合变换的方法来解决绕任意轴旋转变换的问题。图 8.6 所示，设空间一般位置的旋转轴是 AA' ， A 的坐标是 (x_A, y_A, z_A) ， AA' 的方向余弦为 $[n_1, n_2, n_3]$ ，空间一点 $P(x, y, z)$ 绕 AA' 轴旋转 θ 角到 $P'(x', y', z')$ ，即

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} T_{AR}$$

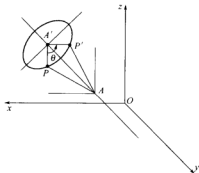


图 8.6 旋转变换示意

T_{AR} 为绕任意轴的旋转变换矩阵，它由基本变换矩阵组合而成，下面的任务就是要构造矩阵 T_{AR} ，步骤如下。

① 将点 P 与旋转轴 AA' 一起作平移变换，使旋转轴 AA' 过原点， A 与原点重合，其变换矩阵为

$$T_1 T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_A & -y_A & -z_A & 1 \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

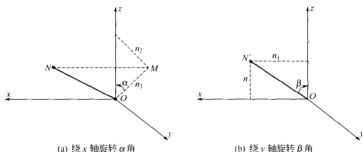


图 8.7 绕轴旋转

② 令 AA' 轴首先绕 x 轴旋转 α 角, 使其与 xOz 平面共面, 如图 8.7 (a) 所示。然后再绕 y 轴旋转 β 角, 使其与 z 轴重合, 如图 8.7 (b) 所示。该变换矩阵为

$$T_{2Rxy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.45)$$

绕 x 轴旋转 α 角绕 y 轴旋转 β 角

由图 8.7 (a) 可知

$$\begin{cases} n = \sqrt{n_2^2 + n_3^2} \\ \cos \alpha = n_3 / n \\ \sin \alpha = n_2 / n \end{cases} \quad (8.46)$$

图中的矢量 ON 即为前述的旋转轴 AA' , 定义 ON 为单位矢量, $|ON|=1$ 。

由图 8.7 (b) 知

$$\begin{cases} \cos \beta = n / |ON'| = n \\ \sin \beta = n_1 / |ON'| = n_1 \end{cases} \quad (8.47)$$

代入变换矩阵中得

$$T_{2Rxy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_3/n & n_2/n & 0 \\ 0 & -n_2/n & n_3/n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -n_1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.48)$$

③ 将 P 点绕 z 轴 (即 AA' 轴) 旋转 θ 角, 变换矩阵为

$$T_{3Rz} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.49)$$

④ 对步骤②作逆变换, 将 AA' 旋转回到原来的位置, 变换矩阵为

$$T_{4Ryx} = \begin{bmatrix} n & 0 & -n_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ n_1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_3/n & -n_2/n & 0 \\ 0 & n_2/n & n_3/n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

⑤ 对步骤①作逆变换, 将旋转轴平移回到原来的位置, 变换矩阵为

$$T_{5T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \end{bmatrix} \quad (8.51)$$

上述 5 步连起来, 便组成绕任意轴的旋转变换矩阵

$$T_{AR} = T_{1T} T_{2Rxy} T_{3Rz} T_{4Ryx} T_{5T}$$

8.2.3 三维图形的投影变换

在工程设计中, 产品的几何模型通常用三面投影图来描述, 即用二维图形表达三维物体。

投影就是把空间物体投射到投影面上而得到的平面图形, 其分类如下。



8.2.3.1 平行投影变换

(1) 正投影变换

用正投影变换的方法可以形成三面视图, 图 8.8 表示物体与三个投影平面 (V, H, W) 的相对位置关系。

① 正面 (V 面) 投影

将物体向正面投影, 即令 $y=0$, 变换矩阵为

$$T_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.52)$$

点在 V 面上投影的坐标变换为

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1] T_V = [x \ 0 \ z \ 1]$$

② 水平面 (H 面) 投影

将物体向水平面 (H 面) 投影, 即令 $z=0$, 然后将得到的投影图绕 x 轴顺时针旋转

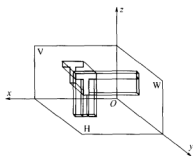


图 8.8 物体与三个投影平面的相对位置关系

90° , 使其与 V 面共面, 再沿负 z 方向平移一段距离, 以使 H 面投影和 V 面投影之间保持一段距离。变换矩阵为

$$T_{\pi} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.53)$$

$$T_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\frac{\pi}{2}) & \sin(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & -\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 1 \end{bmatrix}$$

点在 H 面上投影的坐标变换为

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1] T_H = [x \ 0 \ -y-n \ 1]$$

③ 侧面 (W 面) 投影

将物体向侧面作正投影, 即令 $x=0$, 然后绕 z 轴逆时针转 90° , 使其与 V 面共面, 为保证与正面投影有一段距离, 再沿负 x 方向平移一段距离, 这样即得到侧视图。变换矩阵为

$$T_{W_{\pi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

点的侧面投影变换为

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1] T_W = [-y-l \ 0 \ z \ 1]$$

由上所述可看到, 三个视图中 y' 均为 0, 这是由于变换后, 三个视图均落在 $x'O'z'$ 平面上的缘故。这样, 可用 x', z' 坐标直接画出三个视图。

(2) 轴测投影变换

① 正轴测投影变换

正轴测投影是将物体绕 z 轴逆时针旋转 γ 角, 再绕 x 轴顺时针旋转 α 角, 然后向 V

面投影而得到。变换矩阵为

$$T_{\text{ISO}} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \sin \alpha & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & -\cos \gamma \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

② 斜轴测投影变换

斜轴测投影变换是通过将物体先沿 x 含 y 错切, 再沿 z 含 y 错切, 最后向 V 面投影而实现。其变换矩阵为

$$T_{\text{斜}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

沿 x 含 y 错切 沿 z 含 y 错切 向 V 面投影 斜轴测投影变换矩阵

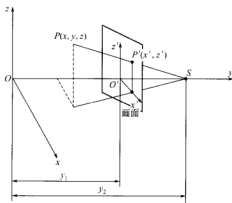


图 8.9 透视原理

8.2.3.2 透视投影变换

(1) 一点透视

如图 8.9 所示, 空间一点 $P(x, y, z)$, 设 S 为视点, 并在 y 轴上, 画面垂直 y 轴且交于 O' 点, 即画面平行于 xOz 平面。显然, 画面是在一个二维坐标系中, 用 $x'O'z'$ 平面表示。画面距坐标系原点的距离为 y_1 , 视点距原点的距离为 y_2 , 由相似三角形的关系可有

$$\begin{cases} x' = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y} x \\ z' = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y} z \end{cases}$$

如令点 O , 点 O' 重合, 则画面就是 xOz 平面 (V 面), 即 $y_1 = 0$, 问题可简化为

$$\begin{cases} x' = \frac{y_2}{y_2 - y} x = \frac{x}{1 - y/y_2} \\ z' = \frac{y_2}{y_2 - y} z = \frac{z}{1 - y/y_2} \end{cases}$$

对物体上的每个顶点都作上述处理，在画面上就可得到这些顶点的透视，顺序连接这些点，即得到物体的一点透视图。

把这种简单的透视投影变换写成矩阵的形式，即

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{y_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

透视变换

向 V 面投影

$$= [x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{y_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一点透视投影变换矩阵

$$= [x \ 0 \ z \ 1 - \frac{y}{y_2}] \xrightarrow{\text{规格化}} \left[\frac{x}{1 - (y/y_2)} \ 0 \ \frac{z}{1 - (y/y_2)} \ 1 \right]$$

令 $q = -1/y_2$ ，则主灭点在 y 轴上 $y = 1/q$ 处、画面为 xOz 平面的一点透视投影变换矩阵为

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对点进行一点透视投影变换

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1] T_1 = [x \ 0 \ z \ 1 + qy] \xrightarrow{\text{规格化}} \left[\frac{x}{1 + qy} \ 0 \ \frac{z}{1 + qy} \ 1 \right]$$

为了增强透视效果，通常将物体置于画面（V 面）后，水平面（H 面）下，若物体不在该位置时，应首先把物体平移到此位置，然后再进行透视投影变换。

q 的选择，决定了视点的位置，一般选择视点位于画面（V 面）前。

(2) 二点透视

首先改变物体与画面的相对位置，即使物体绕 z 轴旋转 γ 角，以使物体上的主要平面（ xOz 平面， yOz 平面）与画面成一定角度，然后进行透视投影变换即可获得二点透视图，变换矩阵为

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & 0 & q \sin \gamma \\ -\sin \gamma & 0 & 0 & q \cos \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果物体所处位置不合适,则需对物体进行平移,为使旋转变换不受平移量的影响,平移变换矩阵应放在旋转变换矩阵与透视变换矩阵之间。

(3) 三点透视

首先把物体绕 z 轴旋转 γ 角,再绕 x 轴旋转 α 角,使物体上的三个坐标平面与画面都倾斜,然后进行透视投影变换,即可得到物体的三点透视图,变换矩阵为

$$\begin{aligned}
 T_3 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \alpha & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \cos \alpha & \cos \gamma \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \sin \alpha & q \sin \gamma \cos \alpha \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \sin \alpha & q \cos \gamma \cos \alpha \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -q \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

如果需要把物体平移到合适的位置,则应把平移变换矩阵放在旋转变换矩阵与透视变换矩阵之间。

8.3 图形变换在设计中的应用

平衡是设计中的重要美学法则。地球上的一切物体,在重力的作用下,都遵循着力学的原则,即物体的各部分之间保持着力的平衡关系,从而呈现出安宁、稳定的状态,这就是平衡。形体的平衡,即保持着稳定的状态。不仅实际上安全,而且感觉上舒服。

平衡中最容易达到的形式,就是对称。

对称在美学观念中是形成美的主要因素之一。对称是人类最熟悉的形式。在生物学中,从非对称到对称是低等向高等进化的一种标志。人与动物天生的对称外表,形成了人固有的对称观念。过去在造型中使用的对称形式,一般有线对称和点对称。随着对造型方法的研究和发展以及对数理概念的引进,现代对称的概念有了变化,除传统意义上的点对称与线对称外,又增加了平动和相似两种。

根据前面的数学公式,有以下四种基本对称关系。

① 平行移动对称 [简称平动对称 (t)]：图形中任意两点 a 、 b 的连线,不论图形怎样移动,线段 ab 都与初始位置时平行,这样的移动(运动)称为平行移动,简称平动。按照平动的规则得到的形态图形,叫做平动对称(图 8.10,图 8.11)。

② 相似对称：把图形按照一定的比例放大(或缩小),对于形的扩大或者缩小会产生动力之感。这种方法又称作扩大对称(h)(图 8.12,图 8.13)。

③ 点对称：以一点作为对称中心,将图形按照一定的角度(如 120° , 90° , 60° , 45° , 30° , ...),在点的周围作回转配列,通过对称中心两端的图形的对应点,距离是相等的。所以又可称作回转对称(d)(图 8.14,图 8.15)。

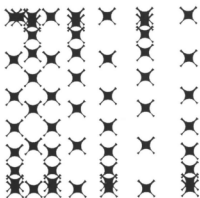


图 8.10 平移对称 (一) (李响)

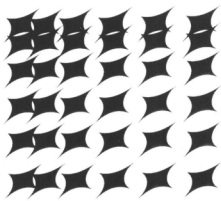


图 8.11 平移对称 (二) (李响)



图 8.12 相似对称 (一) (吉智伟)

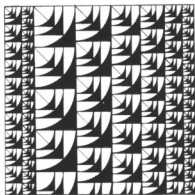


图 8.13 相似对称 (二) (刘剑琼)



图 8.14 点对称 (一) (白天保)

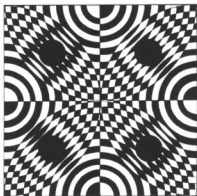


图 8.15 点对称 (二) (张金国)

当图形以 180° 所形成的相互逆转的点对称, 也称为逆对称。如太极图就是典型的逆对称图形。

④ 线对称: 以一条线为中心对称轴, 在其两侧图形的全部对应点, 相对于对称轴处在等距离的位置。即以对称轴对折, 图形可以完全重合, 所以又称作“镜照”或“对映”(s) (图 8.16, 图 8.17)。

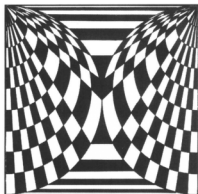


图 8.16 线对称 (一) (涂晓宇)

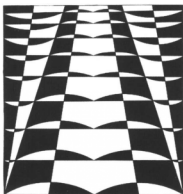


图 8.17 线对称 (二) (范振男)

回转对称、平动对称、相似对称既保持了平衡的基本属性, 也都有运动的意味。即在平衡中, 产生了动感效应。

线对称, 其形式庄重、稳定、安宁。中国的艺术, 特别是建筑样式一般都是严格按照线对称建造的。点对称的构图, 既有对称平衡之感, 又充满了活力和动感。这种形式被充分运用在企业标志和商标设计中。至于平动和相似对称, 本身就有运动的因素, 更能体现构图的动态的张力和力度感 (图 8.18~图 8.24)。

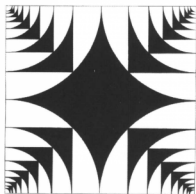


图 8.18 点对称 (三) (寸金翠)

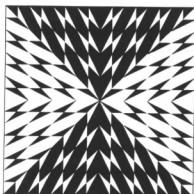


图 8.19 线对称 (三) (周林)

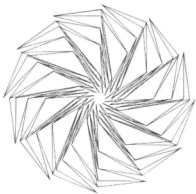


图 8.20 点对称 (四) (刘剑琼)

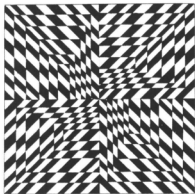


图 8.21 点对称 (五) (刘冠杰)



图 8.22 点对称 (六) (杨艳霞)

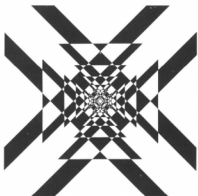


图 8.23 相似对称 (三) (李响)

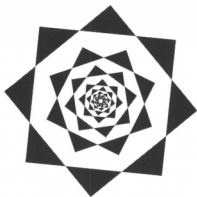


图 8.24 d+h 对称 (李响)

以上四种最基本的对称形式，若进行各种混合操作，便会使得对称的种类随之增加，扩大了对称的表现方法（表 8.2）。

表 8.2 对称的基本形式和混合操作表现

基本形式	① 线对称 (s)		两种形式混合使用	⑩ d+h		
	② 点对称 (d)			⑪ s+h		
	③ 平动对称 (t)		三种形式混合使用	⑫ t+d+h		
	④ 相似对称 (h)			⑬ t+s+h		
两种形式混合使用	⑤ t+d			⑭ d+s+h		
	⑥ t+s			⑮ t+d+s		
	⑦ d+s			四种形式混合使用	⑯ t+d+s+h	
	⑧ t+h					

8.4 小结

① 矩阵是按照一定顺序排列的数表，矩阵的概念主要有矩阵定义、 n 阶方阵、对角线方阵、单位方阵、子矩阵、转置方阵和逆矩阵等。

② 矩阵的重要性很大程度上是被用来在数值上描述线性映射。线性映射的坐标是以特殊方式排列成的一个方阵，矩阵运算是相应于其所表示的线性映射的运算而定义的。

③ 二维图形变换和三维图形变换包括比例变换、对称变换、错切变换、旋转变换、平行变换，在此基础上可以进行各种组合变换。

④ 三维图形的投影变换包括平行投影变换（正投影变换、轴测投影变换）、透视投影变换（一点透视、二点透视、三点透视），根据需要可以应用矩阵进行各种投影变换。

⑤ 图形变换在平面设计中应用最多和最容易达到的是对称，有四种基本对称关系：平动对称、相似对称、回转对称和线对称，进行组合可以得到对称的各种表现手法。

第9章

分形与分形艺术



- 分形
- 分形艺术
- 新的造型语言——分形元设计
- 小结

分形是20世纪70年代发展起来的新学科，是数学的一个新分支，研究的是自然界中常见的、变幻莫测的、不稳定的、非常不规则的现象。用数学语言来说，是研究自然界中没有特征长度、而又具有自相似的形状和现象。分形表现为以无穷多的形状显现出来的美妙物体。

分形艺术作品风格奇特、变化万千、无穷无尽。分形艺术体现出许多传统美学的特性：平衡、和谐、对称等，但更多的是超越这些标准的新的表现：分形艺术的平衡是一种动态的平衡，是其各个部分在变化过程中相互制约的平衡。分形艺术的和谐是一种数学上的和谐，每一个形状的变化，每一块颜色的过渡都是一种自然的流动，毫无生硬之感。分形艺术的对称，既不是左右对称，也不是上下对称，而是局部和整体的对称。在分形艺术中最多的是分叉、缠绕、不规则的边缘和丰富的变化，带来一种纯真的追求野性的美感，一种未开化的未驯养过的天然情趣。从而对传统艺术带来了极大的冲击。分形在艺术和设计所涉及的各个领域有广泛的应用前景。

9.1 分形

9.1.1 分形论的建立

分形是当代科学中最有影响力的基本概念之一，是有效地解决复杂问题的工具之一。它由美籍法国数学家曼德布罗特（B. Mandelbort 1924—）于20世纪70年代中期创立。

面对高山，欣赏着海滩的印记，在白云之下，站在风化的岩石上……人类处于不规则的世界中。早在1875年数学家莱蒙德指出，存在一类处处连续但处处不可微的函数。德国数学家维尔斯特拉斯（K. Weierstrass 1815—1897）构造了一种处处连续但处处不可微的函数曲线——维尔斯特拉斯曲线 $\{F(x) = \text{singma}[b^n * \cos(a^n * \pi * x)]\}$ （对 $n=0, 1, \dots$ 求和），如图9.1所示。

1883年，德国数学家康托尔（G. Cantor）构造了一种被称为康托尔三分集的奇异集合。它是由一条长度为1的直线段 E_0 ，将它三等分，去掉中间一段，剩下两段记为 E_1 ，将剩下的两段再分别三等分，各去掉中间一段，剩下的新产生的四段记为 E_2 ……重复这样

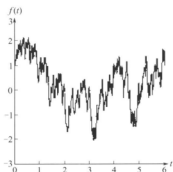


图 9.1 维尔斯特拉斯曲线



图 9.2 康托尔三分点集

的操作，从而得到的一个离散点集 F ，如图 9.2 所示。

1904 年，意大利数学家皮亚诺 (Peano 1858—1932) 构造了可充满整个空间的皮亚诺曲线 (图 9.3)。

1915 年波兰数学家谢尔宾斯基 (W. Sierpinski) 构造了像海绵的谢尔宾斯基垫片 (图 9.4)。

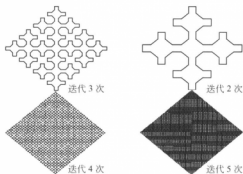


图 9.3 皮亚诺曲线

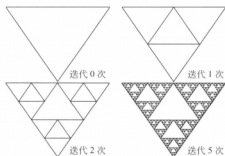


图 9.4 谢尔宾斯基垫片

对于这些不规则的形态，经典几何学无能为力，它们研究的对象是规则而光滑的几何构型。因此传统数学称之为“怪物”，将其处于研究对象之外。曼德布罗特认识到传统学科的困境，大自然的一种新的几何学产生并开始发展，并在许多不同领域中找到了用途。它描述了周围的许多不规则和支离破碎的形状，并通过鉴别出分形形状，形成相当成熟的理论。

1973 年，曼德布罗特在法兰西学院提出了分形几何学的思想，认为分形几何学可以解决大自然中不规则现象。指出分形几何学将成为研究许多物理现象的有力工具。1977 年，曼德布罗特出版了分形论的奠基性的著作：《分形：形、机遇与维数》(Fractal: Form, Chance and Dimension, Freeman, San Francisco, 1982)。中文译本由世界图书出版公司北京公司于 1999 年出版，提出了分形的三要素，即构形、机遇和维数。1982 年，曼德布罗特又出版了《自然界的分形几何学》(The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, 1982)。这两部著作的发表标志着分形论的建立，也标志着分形论

迈进了现代新兴学科之林。

9.1.2 分形原理

9.1.2.1 分形几何与分数维（以下简称分维）

（1）分形几何学的特征

分形几何学研究的是不规则的几何形态。由于不规则现象在大自然中普遍存在着，因此分形几何学又被称为大自然的几何学。分形几何不仅是现代数学的新分支，而且是一种新的世界观和方法论。它与动力系统的混沌理论联系密切，它承认世界的局部与整体具有一定的相似性，比如能量、结构、规则、时间等。理解分形几何和分形就必须理解分维。在欧几里得几何学中，点是零维的，线是一维的，面是二维的，体是三维的，并引入了一些高维空间。但这些维数全是整数，这些整数维数被称为欧几里得维。然而云彩、山川、江河等不规则的自然形态的维数是多少？传统数学只能定性地描述。分形理论认为维数可以是分数的，这就是分维的基本概念。用分维就可以定量地描述它们了。分形几何建立以后，很快就引起了许多学科的关注，这是由于它不仅理论上，而且在实用上都具有重要价值。

从整体上看，分形几何图形是处处不规则的。从近距离观察，其局部形状又和整体形态相似，它们从整体到局部，都是自相似的。这类不规则形态在不同尺度上，图形的规则性又是相同的。但也存在一些分形几何图形，它们并不是完全自相似的。当中一些是用来描述一般随机现象，一些是用来描述混沌和非线性系统。从层次结构划分的意义上来看分数维集合，分数维集合和整数维集合一样，只是各自属于不同人为划分的层次。例如，人们在分数维层次中建立考察自身的数学方法，则在分数维层次中的观测结果是普通和简单的；若将其用于考察整数维集合，则整数维集合就成为了复杂集合。所以说复杂维的产生只是跨越层次考察事物的结果。

曼德布罗特认为：“分形几何具有下面两种选择特征：一个是在自然界的混沌现象中选择问题，因为描述整个混沌是一个既无意义又无可能的主张；另一个是在数学中选择工具，因为数学的优美还表现在无论在哪儿寻求其应用时从不会遇到失望。”分形几何的重要特征就是对所有的分形无论何种形态，都可以通过分维来测定其复杂程度，并反映图形层次结构。

1919年数学家豪斯道夫（Hausdorff Besicovitch）提出连续空间的概念，认为空间维数不是跃变的，而是连续变化的，这就是豪斯道夫维，记作 D_f 。豪斯道夫维认为维数不全是整数，也可以是分数。曼德布罗特为了表达分形维数的分数性质，将豪斯道夫维称为分维。对一维图形，取一条单位长度的线段，将其放大2倍，则长度 $2^1=2$ ，长度放大两倍。对二维图形，取一单位长度的正方形，将其边长放大两倍，则面积 $2^2=4$ 。对三维图形，取单位长度的正方体，将其边长放大两倍，则体积 $2^3=8$ 。对分形对象，每个边长放大 L 倍，则这个分形对象相应地放大 K 倍，即对于此分形对象 $LD_f=K$ ，可以得出公式： $D_f=\ln K/\ln L$ 。要计算康托尔三分点集（图9.2）的豪斯道夫维数，可以将一条长度为1的直线段三等分，去掉中间一段，剩下两段，再将剩下的两段分别三等分，各去掉中间一段，如此重复。在豪斯道夫维数公式 $D_f=\ln K/\ln L$ 中， $L=3$ ， $K=2$ ，因此有

$$D_f = \frac{\log K}{\log L} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\ldots$$

(2) 分维的表示

分形重要的特征就是分维。由于所要描述的对象不同,分维的描述也不同,也就是说,分维的数量是无穷的。例如,信息维数和关联维数等。但可以给出分维 D_q 的一般定

义: $D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{q_i \rightarrow q} \frac{1}{q_i - 1} \frac{\ln \sum_{i=1}^n P_i^{q_i}}{\ln \epsilon}$ ($q = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty$)。式中 P_i 代表覆盖概率,当用边长为 ϵ 的盒子去覆盖分形结构时, P_i 是分形结构中某点落入小盒子的概率。当 q 取不同值时, D_q 表示不同分维。例如 $q=0$ 时, D_q 表示豪斯道夫维 D_0 (即 D_f)。

9.1.2.2 分形概念

曼德布罗特曾经为分形下过两个定义。一是其在 1982 年提出的,即豪斯道夫维数严格大于拓扑维数的集合称为分形 (A fractal is by definition a set for which the Hausdorff Besicovitch dimension strictly exceeds the topological dimension)。即: $\text{Dim}(A) > \dim(A)$ 的集合 A , 称为分形集。其中, $\text{Dim}(A)$ 为集合 A 的豪斯道夫维数, $\dim(A)$ 为其拓扑维数。一般说来, $\text{Dim}(A)$ 不是整数,而是分数。这只是试验性定义。二是分形是其组成部分以某种方式与整体相似的形。(A fractal is a shape made of parts similar to the whole in some way.) 但通过理论和实践的检验,人们发现这两个定义并不能完全包括分形丰富的内容,所以目前分形还没有确切的定义,只能通过一系列特性来体现。

9.1.2.3 分形特性

- ① 分形集都具有任意小尺度下的比例细节,或者说它具有精细的结构。
- ② 分形集不能用传统的几何语言来描述,它既不是满足某些条件的点的轨迹,也不是某些简单方程的解集。
- ③ 分形集具有某种自相似形式,可能是近似的自相似或者统计的自相似。
- ④ 一般地,分形集的“分形维数”,严格大于它相应的拓扑维数。
- ⑤ 在大多数令人感兴趣的情形下,分形集由非常简单的方法定义,可能以变换的迭代产生。

对于各种不同的分形,有的可能同时具有上述的全部性质,有的可能只有①~⑤的大部分性质,而对某个性质有例外,但这并不影响把这个集合称为分形。应当指出,自然界和各部门应用科学中涉及的分形绝大部分都是近似的。当尺度缩小到分子的尺寸,分形性也就消失了,严格的分形只存在于理论研究之中。

9.1.2.4 分形元

分形中构成分形整体的相对独立的部分称为生成元或分形元。由分形的自相似性可知,分形体系内任何一个相对独立的部分,在一定程度上都是整体的再现和缩影。分形元是从分形整体中划分出来的具有相对独立性的基本单位,包含着未来整体的基本信息与素质,由它可以发育成分形整体。只要给定一个分形元,按一定的规则进行迭代,就可产生出缤纷无限的分形图形。例如,谢尔宾斯基垫片(如图 9.4)的分形元是等边三角形,它的形成规则是以原等边三角形三边的中点再构建一等边三角形,然后去掉中间的等边三角形。再将余下的等边三角形进行同样的操作。最终图形的面积趋近于零。分形的应用离不开分形元,因为自相似性必须建立在基本的元素上,并通过一定规则形成自相似的整体。

也可以这么说,没有分形元,就没有分形。

9.1.2.5 规则分形和随机分形

曼德布罗特称 Von Koch 雪花曲线是岛屿海岸线的粗略模型。但 Von Koch 雪花曲线作为岛屿海岸线粗略模型的缺点却是明显的,一是模型的各个部分彼此相同。二是相似属于一类严格的等级,即 $1/3$, $(1/3)^2$ 等。在规则分形中适当地运用随机性,可以建立解决问题的高效模型。

(1) 规则分形及其表达

规则分形是数学家构造出来的,严格地遵守自相似性。

① 康托尔点集 取一线段 $[0, 1]$ 称为初始元,将其三等分,即各段的长度为原线段的 $1/3$ 。去掉中间一段,保留两边的两段。再将留下的两段各自三等分,并再去掉它们中间的一段,保留两边的两段。照此连续下去。最终留下的线段越来越多,而其长度则越来越短,就分割成长度为无限短的无穷多个点,这些保留下来的分布开的点组成所谓三分康托尔点集。正如《庄子·天下篇》说:一尺之棰,日取其半,万世不竭。康托尔点集具有严格的自相似性(如图 9.2)。

图中 E_0 是康托尔点集的初始元线段 $[0, 1]$ 。 E_1 是生成元,它是由 E_0 舍去中间 $1/3$ 段以后得到的,它包含 $[0, 1/3]$ 和 $[2/3, 1]$ 两个区段。 E_2 是 E_1 分别舍去两个区段中的中间 $1/3$ 后得到的, E_2 包含 $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$, $[8/9, 1]$ 4 个区段。按此规则继续操作下去,则生成元 E_n , 将由 2^n 个长度各为 $(1/3)^n$ 的区段组成。当 $n \rightarrow \infty$ 时, E_n 的长度 l 为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0$$

按照康托尔点集的生成法则,每次将线段一分为三,称为康托尔三分集;若每次将线段一分为四,则称为康托尔四分集;若每次将线段一分为十,则称为康托尔十分集。康托尔四分集中,先将一线段四等分,去掉中间两段,保留两边的两段。再将留下的两段各自四等分,并再去掉它们中间的两段,保留两边的两段。照此连续下去就得到康托尔四分集。计算康托尔三分集的豪斯道夫维数, $D_f = 0.6309 \dots$ 。可见对于康托尔点集: $0 < D_f < 1$, 这说明它是介于点与线段之间的几何图形。用同样的方法可以计算康托尔四分集的维数,即

$$D_f = \frac{\log K}{\log L} = \frac{\log 2}{\log 4} = 0.5$$

按照上面的操作方法,若把一线段进行 n 段等分,舍去中间的 $n-2$ 段,保留两侧的两段,即构成 n 分点集,相应的维数为

$$D_f = \frac{\log K}{\log L} = \frac{\log 2}{\log n}$$

② 柯赫(Koch)曲线 柯赫曲线是具有自相似结构的线段。它的构造过程为取一条长度为 L_0 的直线段,先将它三等分,然后保留两侧的两段,将中间的一段改成夹角为 60° 的两个等长的直线,每段长度均为 $L_0/3$ 这是 $n=1$ (迭代一次) 的第一次操作;第二次操作是将上次所得的四段边长为 $L_0/3$ 的线段都进行三等分,现在每段长度为 $L_0/9$,并将它们中间的一段改成夹角为 60° 的两个长度为 $L_0/9$ 的直线。照此连续下去,最终得到

一条具有自相似结构的曲线，称为三次柯赫曲线。

如图 9.5 所示，三次柯赫曲线由四个与整体相似的局部组成，相似比 $\beta=1/3$ ，因此相似维数 D_s 为

$$D_s = \frac{\log N}{\log(1/\beta)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618$$

可见对于三次柯赫曲线，其维数 $1 < D_s < 2$ ，说明它同康托尔点集一样是一种介于线段与面之间的几何图形。

与柯赫曲线相似的是柯赫雪花。它以一个三角形作为分形元，生成规则与柯赫曲线一样。从原多边形开始，第一步形成一个六角星形，第二步将六角星形的 12 条边按柯赫曲线的生成规则进行同样的操作得 48 条边星形，以后依此进行同样的操作，直至无穷，生成称为柯赫雪花的图形。在极限的情况下，柯赫雪花上的折线演变成曲线。由于柯赫曲线生成中的每一步操作都会使折线的长度增加，所以在极限的情况下，柯赫雪花边的总长度将趋于无穷，当 $n \rightarrow \infty$

$$L = \left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow \infty$$

然而，由于它是闭合的曲线，因此它所围的面积有一个确定的值，即

$$S = 1 + 3\left(4^0 \times \frac{1}{9} + 4^1 \times \frac{1}{9^2} + 4^2 \times \frac{1}{9^3} + 4^3 \times \frac{1}{9^4} + \cdots\right) = 1 + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{9^{n+1}} = \frac{8}{5}$$

计算表明，柯赫雪花（图 9.6）的分维数与柯赫折线的维数 D_s 是相同的。

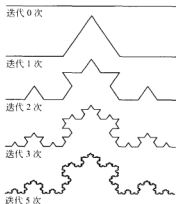


图 9.5 柯赫曲线

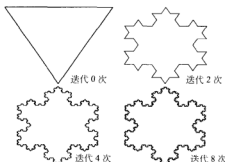


图 9.6 柯赫雪花

③ 谢尔宾斯基图形和门杰海绵 谢尔宾斯基图形是由俄罗斯数学家谢尔宾斯基构造的，人们又分别称之为谢尔宾斯基垫片、地毯等。

谢尔宾斯基三角形垫片（图 9.4）的构造方法是取一个等边三角形，将其四等分，得四个较小的三角形。然后舍去中间一个三角形，保留周围的三个三角形。此后再将这三个较小的三角形按上述分割与舍去法则，进一步操作下去，得到一种介于线段与面之间的几何图形。因为对于此种图形可以设想从一个小三角形开始，将其每边扩大 2 倍，将得到与之相似的大三角形，其面积为小三角形的 4 倍。约定将中间的一个小三角形舍去，因此实际面积为小三角形的 3 倍。在豪斯道夫维数式中， $L=2$ ， $K=3$ ，于是

$$D_f = \frac{\log K}{\log L} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5849$$

在构造谢尔宾斯基地毯（图 9.7）时，取一正方形将其作 9 等分，得 9 个较小的正方形，并舍去中央的那个小正方形，保留周围的 8 个小正方形。然后将保留的每个小正方形再进行 9 等分，并且同样舍去中央的正方形，按此规则不断细分与舍去，直至无穷。谢尔宾斯基地毯的极限图形面积趋于零，小正方形个数与其边的线段数目趋于无穷多，因此它实际上是一个线集，图形具有严格的自相似性。对于它的分维值，从考虑一个小正方形出发，将它的每边扩大三倍，并舍去中间的一个正方形，于是得豪斯道夫维数式中的 $L=3$ ， $K=8$ ，因此

$$D_f = \frac{\log K}{\log L} = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.8927$$

另一种谢尔宾斯基地毯如图 9.8 所示。

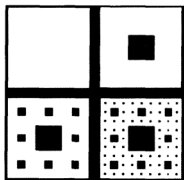


图 9.7 谢尔宾斯基地毯

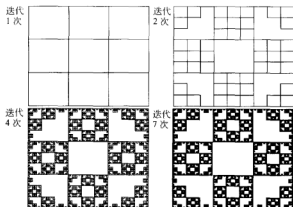


图 9.8 另一种形式的谢尔宾斯基地毯

数学家门杰 (K. Menger) 从三维的单位立方体出发，用与构造谢尔宾斯基地毯类似的方法，构造了门杰海绵（图 9.9），这种分形的结构表面积无穷大，人们将其用于化学反应中的催化剂或阻化剂的制作。

在具体计算门杰海绵的分维值时，可以考虑从其中一个小立方体出发，将每个棱边扩大三倍则体积放大 27 倍，由于舍去了七个体心和面心的小立方体，利用豪斯道夫维数式，得： $D_f = \frac{\log K}{\log L} = \frac{\log 20}{\log 3} = 2.7628$ 。由此可见，对于门杰海绵，其分维 $2 < D_f < 3$ ，这说明它是介于面与体积之间的几何图形。

④ 曼德布罗特集 曼德布罗特集即 Mandelbrot 集（图 9.10）可能是分形研究中最著名的图形了，它是分形、混沌的一种国际形标志。曼德布罗特集作为最标准的分形图，显示了分形自相似之美，表现了分形几乎所有的典型特征。

曼德布罗特集是 20 世纪 80 年代初曼德布罗特在研究 $z \rightarrow z^2 + c$ 时发现的，简称 M 集。它给定 z_0 为一个初始的复数， c 为一个复常数。用 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ 对 z 进行迭代，如果 n 趋向于无穷时 z_n 有界，则 c 属于 Mandelbrot 集。

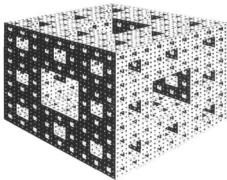


图 9.9 门杰海绵

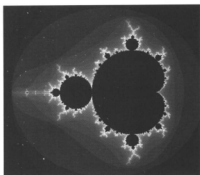
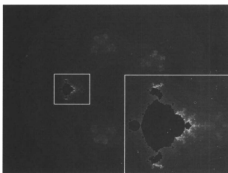
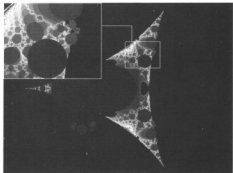


图 9.10 曼德布罗特集

通常会进一步思考, 如果每次迭代时取 z_n 的 3 次方、4 次方, 会产生什么样的图形呢? 如果 c 取倒数, 或者和三角函数结合, 会产生什么结果?

这里给出 $z = z^k + 1/c$ (图 9.11) 和 $F(z) = 1/(z * z) + c$ (图 9.12) 产生的分形图形。

图 9.11 由公式 $z = z^k + 1/c$
产生的分形图形图 9.12 由公式 $F(z) = 1/(z * z) + c$
产生的分形图形

⑤ 朱丽叶 (Julia) 集 (图 9.13) Julia 集和 Mandelbrot 集可以说是一对孪生兄弟。曼德布罗特集 M 记录的是整个区域上的 c 值情况, 而朱丽叶集是取一固定的 c 值后, 观察复平面的每一点而得来的。

Mandelbrot 集的迭代公式 $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ 中, 给定复数 C , 如果 n 趋向于无穷时 Z_n 有界, 则 Z_0 属于 Julia 集。

Julia 集图形的画法自然和 Mandelbrot 集的画法一样, 只是初始条件、边界条件和迭代变量稍有不同。

(2) 随机分形和布朗运动 (图 9.14)

规则分形是数学家构造出来的, 严格的遵守自相似性, 属于自相似分形集。但大自然中广泛存在的是随机分形, 这类分形的自相似性不是严格的, 是近似的或统计意义上的, 它们也存在于无标度区域。若超出无标度区域, 自相似性规则就不能解释。比如分子链的结构, 人的随机行走和随机生长等。布朗运动就是典型的随机分形, 称为统计自相似性。

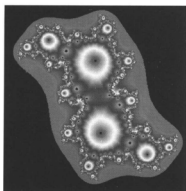


图 9.13 朱丽叶 (Julia) 集

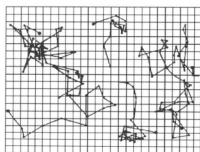


图 9.14 布朗运动轨迹图

布朗运动的轨迹线是其无规行走的结果。布朗运动无规行走的物理原因是液体中周围分子对微粒撞击造成的瞬时涨落。由于布朗微粒在行走中迂回曲折, 因此虽经长时间行走, 离起点距离也不会太远, 理论计算表明实际的行走距离正比于时间 t 的方根, 即 \sqrt{t} 。但布朗运动不能作为海岸线的模型是因为: 它太不规则, 含有无数多个重点, 这与海岸线很是不同, 其个数在严格的数学意义上是不可数的。

人们通过计算得出, 无论布朗运动是一维的、二维的或是三维的, 其分维数都为 2。

$$D_c = -\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log b} = -\left[\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\log(R^2)}{\log b} - 2 \right]$$

R 是粒子的总位移矢量, r 是每一步的位移矢量, b 是粒子每步位移的平均值。当 $b \rightarrow 0$ 时, $D_c = 2$ 。那一维运动怎么会走出二维的图形? 其原因就在布朗运动的路线是迂回曲折的。在一维情况下, 布朗粒子将沿着直线来回不停地行走, 造成一维线段上走出了二维的图形, 然而更高维数的运动空间又没有使分形维数增加, 这是一种有趣而重要的现象。“此外, 它的面积为零。然而, 它的维数 $D_c = 2$, 而且 (在某种意义上) 它以均匀的方式填满整个平面, 这就是 N. Wiener 所谓的布朗 ‘混沌’ 是均匀的几重意义之一”。

9.1.2.6 分形与混沌

分形与混沌的关系十分密切。产生混沌, 就意味着整个系统失去控制, 没有办法预测系统长期性发展。1963 年气象学家、混沌理论的创始人之一洛伦兹 (E. N. Lorenz) 在《大气科学》杂志上发表了《决定性的非周期流》一文, 阐述了在气候不能精确重演与长期天气预报者无能为力之间必然存在着一种联系, 这就是非周期性与不可预见性之间的关系。洛伦兹在计算机上用他所建立的微分方程模拟气候变化的时候, 偶然发现输入的初始条件的极细微的差别, 可以引起模拟结果的巨大变化。洛伦兹打个比喻, 在南半球某地一只蝴蝶的翅膀的偶然扇动所引起的微小气流, 几星期后可能变成席卷北半球某地的一场龙卷风, 这就是天气的 “蝴蝶效应”。蝴蝶效应成为对处置的敏感依赖性的同义词。它说明了计算机模拟的长期天气预报是不可能准确的。

(1) 奇异吸引子

混沌主要讨论非线性动力系统的、不稳定的、发散的过程。它研究的是无序中的有序, 许多现象即使遵循严格的确定性规则, 但大体上仍是无法预测的。混沌事件在不同的时间标度

下表现出相似的变化模式。但系统在相空间总是收敛于一定的吸引子（这与分形在空间标度下表现的相似性十分相像），这就是奇异吸引子。奇异吸引子是一类具有无限嵌套层次的自相似分形几何结构。哈肯说：“混沌性来源于决定性方程的无规运动。”洛伦兹在《决定性的非周期流》中构造出一条曲线，这条曲线被称为洛伦兹吸引子（图 9.15 和图 9.16）。

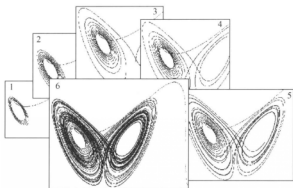


图 9.15 洛伦兹系统混沌轨线的生成过程

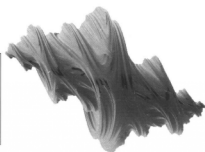


图 9.16 三维奇异吸引子（李刚）

纽约时报技术部主任格莱克（J. Gleick）提出了下面这个方程组

$$\begin{cases} \partial x / \partial t = -\sigma(x - y) \\ \partial y / \partial t = rx - y - xz \\ \partial z / \partial t = xy - bz \end{cases}$$

① 稳定性 表示在有噪声的世界中动力学系统的最终状态。

② 低维性 相空间中一条低维（非整数，即分维）轨道。

③ 非周期性 运动轨道永远不自我重复。

④ 初始条件敏感性 有差之毫厘，失之千里的实际情况。这是一个几何上的难题，在有限的相空间中形成一条轨道，它既不自我重复，又不自我交叠，还要产生一切节律，那么这条轨道必须是有限体积中的无限长的线。换句话说，这是一个奇异吸引子，它必定具有分形性质。

（2）普适常数

普适常数是由美国费根鲍姆发现的。费根鲍姆在计算三角函数 $x_{n+1} = \lambda \sin \pi x_n$ 的倍周期过程中和其他函数收敛序列中发现形式和意义不同的方程都是几何收敛的，并且计算的收敛率都是 4.699。他继续研究发现许多结构不同的非线性迭代系统在变化过程中往往通过一串倍周期的转变走向混沌，这被称为费根鲍姆普适性。它与普朗克常数 h ，真空中的光速 C ， e 和 π 一样都是反映宇宙本质的普适常数。这个发现深刻揭示了决定性系统走向混沌的规律。决定性系统具有内部的随机性，所以决定性系统与随机性之间不存在不可逾越的鸿沟，混沌为两岸架起了桥梁。

（3）混沌的特征

① 随机性 体系处于混沌状态是由体系内部动力学随机性产生的不规则行为。它强调混沌现象形成的根源在体系内部，即混沌现象取决于体系内部的因素。产生混沌现象的

体系,一般具有整体的稳定性,而局部不稳定。而体系局部不稳定性正是内随机性的特点,这也就是微初值敏感性的原因。

② 分维性 混沌的分维性是指系统运动轨迹在相空间的几何形态可以用分维来描述。系统的混沌运动在相空间中表现出无穷尽的自相似结构。这正是奇异吸引子的结构特征。

③ 普适性 当系统趋于混沌时,所表现出来的特征具有普适意义。其特征不因具体系统的不同和系统运动方程的差异而变化。这类系统都与普适常数相联系。

④ 标度律 混沌现象是一种无周期性的有序态,具有无限层次的自相似性结构,存在无标度区域。只要数值计算的精度或分辨率足够高,则可以从中发现小尺度混沌的有序运动花样,所以具有标度律性质。

9.1.2.7 分形算法

(1) 二维分形算法

二维分形的创建可以通过一维变换得到,一般的算法是一维线段中点随机平移算法。创建一条线段,设端点为 A, B 。找到它的中点 C ,并在线段上随机移动一点距离。这样就得到了两条线段 AB, AC 。重复以上步骤,一直到足够多的次数,那么就可以得到比较满意的二维分形了。例如 Generating Random Fractal Terrain 算法可以很好地绘制山脊。分形山脉的陡峭程度,取决于随机值每次循环减少的多少。每次循环减少量减少得越少,所得山脊线就越平滑。但如果减得太多,则会有明显的锯齿感。可以说粗糙度存在于一个常量里。

下面这个例子可以很好地说明这个问题。在二维直角坐标系中,画一条 x 取值范围为 $-1.0 \sim 1.0$, y 的值均为 0 的线段。开始时,将 x 随机值范围设为 $-1.0 \sim 1.0$,这样在此范围里生成一个数字,并将中点移动到这个数字大小的距离,从而得到图 9.17。

现在将上一步生成的两线段按步骤一进行操作,只是 x 轴的随机值范围减半,变为 $-0.5 \sim 0.5$ 。之后两个中点各自生成一个这个范围内的随机点,结果如图 9.18。



图 9.17 二维分形的创建步骤(一)



图 9.18 二维分形的创建步骤(二)

再次缩减范围后,现在随机值的取值范围是 $-0.25 \sim 0.25$ 。再以该范围内的数变换四个中点后,得到了图 9.19。

从上述创建步骤可以看出图形的创建是分布产生的。实际上,它可以用一个迭代过程相当自然地实现。对于这种情况,递归或迭代都可以。对于表面生



图 9.19 二维分形的创建步骤(三)

成代码,使用迭代实现比递归会有一些好处。所以为保持一致,线和面相应的代码都使用迭代实现。其次,它是个非常简单的算法,却能够创建非常复杂的结果,这正是分形算法的美妙之处。一些简单的指令可以建立一个具有丰富细节的图形。

(2) 三维分形算法

与二维情况相似,三维的分形一般通过二维平面变换得到。

① 算法一 随机生成地形算法。首先考虑一个空的二维数组。在各个结点处随机生成一个值,然后渲染。这种算法的优点是生成地形速度快,但缺点就是生成的地形太离散。所以这种算法的应用受到很大限制。

② 算法二 将算法一的算法扩展。仍是考虑一个空的二维数组。但是只在某些点随机生成值,然后以这些点为原点向四周递减。这种算法就解决了算法一生成地形太分散的缺点,而且这种算法生成的图形也相对平滑。

③ Diamond+Square 算法

(i) 建立。首先建立一个空的、方的二维数组,也就是 2 的 $(n+1)$ 次方乘以 2 的 n 次方。然后取四角组成的正方形,并随机生成一个数值,然后使这个正方形中心的数值等于四角数值的和的平方根加上刚才生成的随机数,这样就得到 4 个正方形,然后重复以上步骤,即取四角并生成随机数,然后将正方形中心赋值,这样经过 n 次以后,就得到 2 的 $2n$ 个正方形了。

(ii) 着色。就以上算法而言,除了生成地形非常好之外,还能生成云纹理。由确定的数组值可知,将数值最大处着不透明的白色,最小处着蓝色。依次平滑过度,而半透明效果将由 RGBA 的 ALPHA 分量决定。

(iii) 分形的平滑过度。通常做法有两种:自平方和乘以一个叫做平滑系数的数字。自平方就是将某点或该点周围的数值经过平方或开方后赋值给该点。使用平滑系数(一般叫做 H 数),则能使数值较平滑过度。一般来讲, $0 < H \leq 1$, H 越大,棱角越分明。

(iv) 高度图。上边所说的中点变换算法可以用一个一维数组实现,数组成员是表明线段端点垂直位置的高度值。这数组就是一个一维高度图。它将索引(x 值)映射为高度值(y 值)。为模拟随机地形,就要将该算法推广到 $3D$ 空间——需要一个二维高度值数组,它将索引(x, z)映射为高度(y)。数组只需保存高度值(y)。水平面值(x 和 z)可以在分析数组时即时生成。通过对每个高度指定一个颜色,可以将一幅高度图显示为一幅图像。如图 9.20 和图 9.21 所示,高点为白色,低点为黑色。

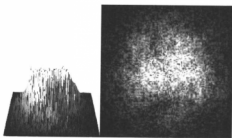


图 9.20 高度值差异大的高度图(李刚)

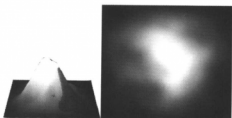


图 9.21 高度值差异小的高度图(李刚)

9.1.3 分形应用和发展

现在,各学科都交融地发展着,新的指导性、系统性的学科的出现,都会汇聚出火花,从而推动各学科的发展。各学科的发展又充实着分形论。它给自然科学和社会科学领域,提供了一种具有普遍性的科学方法和思考方式。

分形在自然科学中所涉及的范围十分广泛,例如物理学、化学、计算机科学、电子学、生物学、医学、天文学、农学、生理学、材料学、气象学和地震学等。

社会科学与自然科学有着十分紧密的联系,社会科学不断地吸收自然科学领域提出的新的概念和方法。例如经济分形、管理分形、情报分形和艺术分形等。

在艺术方面,分形也有很多的应用。比如分形音乐和分形在设计中的应用。分形音乐

是由一个算法的多重迭代产生的，自相似是分形几何的本质，有人利用这一原理来建构一些带有自相似小段的合成音乐，主题在带有小调的三番五次的反复循环中重复，在节奏方面可以加上一些随机变化，它所创造的效果，无论在宏观上还是在微观上都能逼真地模仿真正的音乐，尽管它听起来不那么宏伟，但至少听起来很有趣。有人甚至将著名的曼德布罗特集转化为音乐，取名为《倾听曼德布罗特集》（Hearing the Mandelbrot Set），他们在曼德布罗特集上扫描，将其得到的数据转换成钢琴键盘上的音调，从而用音乐的方式表现出曼德布罗特集的结构，极具音乐表现力。实际上，分形音乐已成为新音乐研究的最令人兴奋的领域了。分形在设计中的应用在下面再介绍。

分形在软件中也有很多应用。比如 Bryce 3D（图 9.22），在生成的地形中，有 fractal 按钮是随机生成地形的。

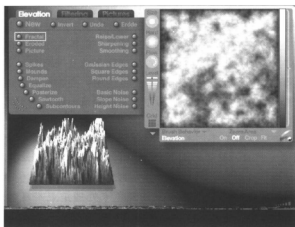


图 9.22 Bryce 3D 中的 fractal 分形地形生成

分形理论本身在不断地发展中。近年来，又提出许多新的概念，其中包括，自仿射分形、自反演分形、递归分形、多重分形、胖分形。这些概念不断充实着分形理论。目前分形理论的应用发展远远超过了理论的发展，并且给分形的数学理论提出了更新更高的要求。

9.2 分形艺术

9.2.1 分形艺术概述

分形艺术是指应用分形理论进行创作的艺术作品。分形艺术创造了大量有关分形理论的艺术作品。反映分形理论的艺术作品类型非常广泛，包括由数学公式直接生成的分形图形、反映分形理论的图形（计算机、手绘，甚至数字的排列）、艺术作品、产品设计、环境艺术设计、建筑设计、音乐、舞蹈、影视作品和雕塑等。这些艺术若单独考虑，可以称为分形艺术—产品设计、分形艺术—雕塑设计等。

事实上，在创作分形图形时，并不完全知道将会产生什么样的结果，也就是说，它具有一定的不可控性。但作图的过程可以不断地激发想法，可以在运算结果中调出能表达自己思想的形象，漂亮的分形图形是通过不断地调试而产生的。这也说明分形可以产生出人们所意想不到的结果来。像中国画法中的泼墨就是即兴的、浑然天成的。令人庆幸的是，

许多分形爱好者编出许多功能强大的分形软件比如 Fractint、Iteration MFC Application 和 Fractal designer 2.0 等。这些软件弥补了艺术工作者在编程、数学方面的缺陷,使他们的艺术才能得以展示。分形软件是艺术与数学之间的桥梁。分形艺术的应用,重要的还表现在用分形的理念来进行艺术创作。分形理论既然定义为方法论,用它来促进设计理论的发展是相得益彰的事情。

刘华杰先生在《分形艺术》中对分形图形艺术是这样定义的,“定义:根据非线性科学原理,通过计算机数值计算,生成某种同时具有审美情趣和科学内涵的图形、动画,并以某种方式向观众演示、播放、展览,这样的一门艺术叫做分形图形艺术。”按刘华杰先生的话:“这个定义稍稍窄了一些,比如根据分形原理,不用计算机,单纯通过手工复制,用手工完成计算机的迭代操作(也可以用其他方法),也能创造出各种丰富多彩的分形图形。这种做法很有趣,读者不妨试试。看来,计算机并不是必须的,但分形思想则是必不可少的。荷兰的克里查罗(V. V. Kritchallo)用分形思想生成过一幅十分典型的分形作品《霜》(Rime)” (图 9.23)。一种理论能否被社会接受,关键在于它对社会做出了多大的贡献。分形论使人们对世界的认识更深一步,对人类社会的发展起到了重要的作用。若只将分形艺术严格地定义在数学和非线性科学的理论范围中,会阻碍分形论在社会中的普及。

分形图形有很强的视觉冲击力,人们都为其美而倾情。即使再次见到,也会有新的感受。这使分形艺术可启发设计师的灵感。

色彩对分形图形也很重要。不同的色彩配合同一分形图形可以表现出很大的差异。在 1984 年,德国不来梅大学的一群年轻人制作了上百张的分形图片,并在此基础上举办了名为“混沌的最新发展”的展览会,受到了极大的欢迎和关注。他们认为:“常用不同的着色方法来显示相同的实验结果。采用不同的颜色来处理是观察复杂结构的一个重要手段。颜色的选择和组合类似于为一首管弦乐作品配器;尽管某一乐器对乐曲的主题不会有本质的影响,但对观众的感觉有很大的作用”。“标色有很多技巧,表面看来好像属于计算机技术,但实际上这属于传统的美术。懂得传统美术色彩理论的人,在此大有用武之地。一幅分形图形标上不同的颜色,就有完全不同的视觉效果,虽然本质上具有同样的数学结构。因此,从这种意义上说,分形图形艺术是传统美术与计算机的结合。如果掌握了计算机这个工具,甚至完全可以说,这与传统的美术没有本质区别”。

一张分形图(图 9.24)可以无限制的放大,可以发现,分形图的不同局部可以有不同的意味(图 9.25,图 9.26)。

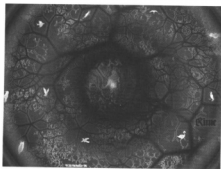


图 9.23 《霜》(Rime)

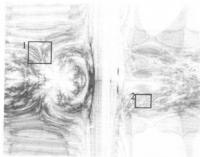


图 9.24 一张分形图(李刚)

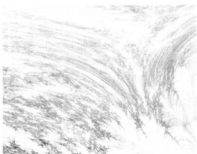


图 9.25 分形瀑布 (李刚)



图 9.26 分形地层 (李刚)

9.2.2 传统设计方法的转变

柏拉图在《美诺篇》中列举了两个正方形，它们的关系是，一个正方形的一边等于另一个正方形的对角线的一半。在《蒂迈欧篇》中他列举了只有五种规则的三度立体。在他看来，这些是理想的比例。很多中世纪建筑师都认为柏拉图在《美诺篇》和《蒂迈欧篇》中的例子是理想的样式。希腊、罗马的许多中世纪建筑，就是根据这些三角形和正方形而设计的。伽利略曾宣称，“自然界伟大的书是用数学语言写成的”，而且补充说，“其特征为三角形、圆形和其他的几何图形，没有这些几何图形人们只能在黑暗的迷宫中做毫无结果的游荡。”

欧几里德几何学对现代主义设计有极大的贡献，是康定斯基（图 9.27）、格罗皮乌斯、蒙特里安（图 9.28）和雷蒙等现代主义设计大师创作的理想工具。也使人们认为简洁的直线创作出来的作品（如产品、平面设计和建筑等）极具现代感。但现代主义设计的缺点也非常明显（如过于程式化和缺少人情味等），出现了许多如孟菲斯设计和波普设计等后现代主义设计。在艺术创作中适用分形，其作品与人、自然就具有“先天性”的联系。

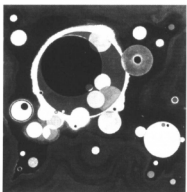


图 9.27 康定斯基——几个圆形

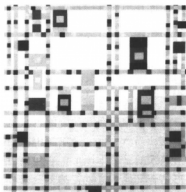


图 9.28 蒙特里安设计作品

9.2.3 分形艺术的应用价值

墨子十分注重应用，总是要问一个“为什么”。如要建造一所房子，先问为什么要造房子，然后才知道“怎样做”。知道房子的用处是“冬避寒焉，夏避暑焉，室以为男女之别”，方知道如何设计。这就是“何以为室，室以为室也”。

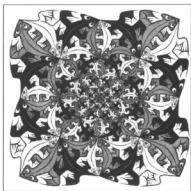


图 9.29 埃舍尔作品

表现出分形迭代的过程。埃舍尔作品复杂的图形，实际上是由几个简单的图形元素（可以叫它分形元）通过一定的规则反复迭代产生的。在这当中可以看到不同尺度的细节。这正是分形原理的体现。

贡布里希在论述作为艺术的装饰图案的设计原理时，恰采用了现在所说的分形的构建方法。他写道“现在，把设计原理简单化为一幅单一主题的示意图也许是有用的。先画一个等边十字形（分形元）。只要能找到尖细的笔，只要纸张不破，这个程序就可以一直再往下继续（这是分形构图的迭代方法，这里所说的笔与纸的困难，计算机都能解决）。往外延续也同样是可能的，可以把另一个十字形作为第一个十字形的框架，这两个程序都可以无限地继续下去。显然，第一种画法，即向内连接任何剩下的区域的方法，最接近于装饰风格，驱使装饰者不断填补剩下的空白处的动力，一般被描述为怕留空隙，许多非古典风格被认为具有这种怕留空隙的特征。也许用喜爱无限这个术语来描述这种动力更为恰当些”。

分形图形并不能准确地表达创作者的思想，若将已生成的分形图形结合其他工具进行复合设计，这就使分形图形的应用十分广泛了。它可以应用于广告设计，服装设计，装饰、装潢设计，绘画、影视创作等。例如，IBM公司已将分形山脉应用于广告设计中；德国设计师冈特·兰勃在一些招贴设计中利用分形原理，创作出许多优秀的作品；日本的设计师五十岚威畅运用分形原理，结合中国的汉字“响”，及古典欧洲的徽章图形为古典音乐厅设计了标志（图 9.30）。

将分形艺术利用在其他方面也很重要。任何一支绘画流派，面对美妙的分形图都不能无动于衷。当然可以从分形图找到实体感。这对产品设计师有极大的帮助。目前最能表现分形艺术的是分形图形。它包括由数学公式直接严格生成的分形图形和利用已生成的分形图形结合其他工具进行的复合设计（图 9.31）。

9.2.4 分形艺术作品的分类

分形设计艺术可以分为两种情况，一种是分数维小于 3 的类平面艺术，另一种是分数维大于等于 3 的类立体艺术（当中既包括整数维型，也包括分数维型）。

① 平面类分形设计包括于分数维小于 3 的类平面艺术中，以创作形成过程进行划分，大致分为以下两类。

- 基本型分形图案类。这是一种体现数学美的公式艺术。一般是由单个公式或多个公



图 9.30 古典音乐厅徽章



图 9.31 分形山脉（李刚）

式叠加而成。它体现的美的象征意义不是很多，但它具有的美是毋庸置疑的，将其称为艺术是严肃但不失活泼的。

●象征型分形图案类。主要由基本型分形图案通过合成设计、复合设计产生；也包括以其他方式反映分形理论的平面艺术作品。设计表达出的图形作品无疑加入了创作者的思想，创作者的思想反映的是人类对世界的认识。“虽然作者在创作时并不知道其最终结果的形式，但他可以在运算结果中挑选出表达自己思想感情的形象来。一方面，这说明分形还无法精确地反映艺术家主观上所要表达的结果，即它不是完全可控的；另一方面，也反映出分形能够产生出人的主观意识所想像不到的结果来。”比如分形艺术家 Don Archer 说：“你不会知道你的分形看上去是什么样子，直到你亲眼看到它，我也一样，所有的分形艺术家都不会知道。”

象征型分形图案不仅可以表达抽象的艺术，也可以表达仿真的艺术。分形艺术家 Ken Musgrave 在这方面有出色的成果。他研究的主要目的是创造一个完全的人造世界。他认为：分形是自然的语言。简单的分形公式可以轻易地复制很多复杂的自然的特征。分形数学是自然界创造性过程的根源。他的作品（图 9.32）模拟的山脉、湖泊、雾和太空等都非常真实。

仿真类分形艺术在电影界有很广泛的应用。比如鲁卡斯电影公司的影片《星际旅程Ⅱ：可汗的愤怒》中行星起源的演变序列图。

② 类立体类分形设计包括于分数维大于等于 3 的造型设计中，以分数维进行划分，大致分为：分维数等于 3 的立体艺术和分维数大于 3 的立体艺术。分维数大于 3 的立体艺术其中包括分数维大于 3 的整数维数的立体艺术和分维数大于 3 的分数维数的立体艺术。

各种不同的造型都可以归为分维数等于 3 的立体艺术。依照多维理论，维数是可以大于 3 的；依照分形理论，大于 3 的维数不仅包括整数维数，而且包括分数维数。例如四维空间，它由时间轴加入到构成三维空间的 x 轴、 y 轴和 z 轴中构成。可以这样说，任何时

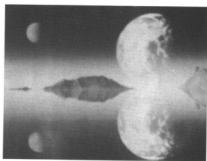


图 9.32 山脉、湖泊、雾和太空

代的造型都可以通过这个时间轴将其延续到现在或未来。这也是无论何时都会有仿古的经典造型存在的原因。当然,加入三维空间 x 轴、 y 轴和 z 轴中的不仅是时间轴,例如可以是思想意识轴。

9.3 新的造型语言——分形元设计

分形反映的是一种世界观和方法论,表现在设计中就是设计世界的“世界观”和“方法论”。它可以成为一种最基本的、具有指导意义的设计表达语言——分形元设计。根据分形理论,分形元在一定程度上是整体的再现和缩影。分形元是从分形整体中划分出来的具有相对独立性的基本单位,包含着未来整体的基本信息与素质,由它可以发展成形成整体。这就是一个分形元通过不同的组合规则(设计)可形成不同的整体结构,也说明在设计中,如果设计的基本元素相同或近似,只要是组合规则不同,就可以形成形态各异的生成品。

9.3.1 分形元设计概念

分形元设计是指对于各种不同的形态,它们由两部分产生,一是构成形态的基本元素,称之为源生元素,源生元素包含了生成整体的几乎全部特性;二是构成形态的不同演变规律,称之为形态演变规律,两部分的相互作用最终形成各种不同的形态(图 9.33)。

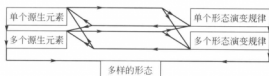


图 9.33 分形元设计原理

如图 9.33 所示,单个源生元素和单个形态演变规律、多个形态演变规律都可以组合;同样多个源生元素和单个形态演变规律、多个形态演变规律都可以组合。这样,不同的源

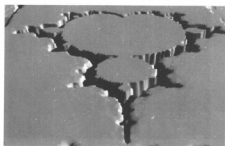


图 9.34 曼德布罗特立体图

生元素和不同的形态演变规律可以组成无限的形态。例如平面到平面的转变(参见图 9.10)、平面到立体的转变(如图 9.34 所示的曼德布罗特立体图)、立体到平面的转变和立体转变为立体。

形态生成过程中平面到平面的转变、立体到平面的转变和立体转变为立体都相对容易,但平面到立体的转变也就是平面图形转化为立体形态就比较困难。好在现在有一些软件如 Bracy 3D 等可以将平面图形转化为立

体形态(图 9.35, 图 9.36)。

在 Bracy 3D 中,可以形成产品和建筑等立体形态,通过插件来设置它们的材料,尺寸、结构和功能。如果这些问题解决了,那保持特征进行设计就非常准确和容易了。

分形元设计可以看作是生物世界的造物规律。结构生物学家发现两个 DNA 组成差异极大的病毒却有着极其相似的分子结构。科学家 Burnett 的研究小组探测 PRD1(可感染



图 9.35 虚拟的迷宫城市 (李刚)

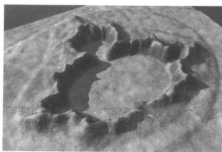


图 9.36 曼德布罗特盆地 (李刚)

大肠杆菌和其他细菌的普通病毒), 得到噬菌体的整体结构, 然后通过 X 射线研究其晶体结构从而获得更详细的细节信息。PRD1 与腺病毒在结构上有着“惊人的相似性”。对源生元素来说, 重要的是它需要一个或一些程序或者说是它需要一个可能是模糊的但可预知的过程来演变它所具有的信息, 这就是形态演变规律的重要性。例如, 柯赫雪花 (图 9.6) 与柯赫曲线 (图 9.5) 生成规则一样, 分形元不同, 则最终生成结果不同。

9.3.2 分形元设计原理对设计的影响

(1) 建立源生元素库和形态演变规律库

可以建一个源生元素库和形态演变规律库, 这里的源生元素和形态演变规律具有多样性的特征。这样既可方便使用, 也可根据反馈的信息进行改良。源生元素库和形态演变规律库不是堆积的数据库, 它们更注重运用和改良。它同时是一个开放的体系, 方便了各个领域的交流。这样可以知道需要发展的方向。

形态演变规律可以将不同的源生元素转变为自相似的形态, 形态演变规律也是在不断演进的。形态演变规律控制着设计在人类社会中的演化。例如, 各种设计学派都有它的相对局限、又有明显特征的表现形式, 如图 9.37 所示的孟菲斯设计, 这就是分形元设计理论所起到的作用。人类社会某一阶段的主要设计审美可以说反映的是那个时代发展或需要发展的方向, 它构成的是那个时代的整体审美。这也表明现在或今后设计作品的共同之处就是反映的是那个时代发展或需要发展的方向。

(2) 分形元设计理论对产品的影响

分形元设计理论也说明今后设计的作品是一个系列。这个系列中的各个设计作品都反映了这个系列的总体特征。作品做成一个系列, 它的好处是可以减少使用日益珍贵的一次性资源; 反映人的个性化需求等。从分形元设计的定义可以看出, 只要源生元素和形态演变规律不变, 那么生成品的形态就不发生改变。只要其中之一改变, 那生成品的形态就改变了。这样, 形式特征独一无二。使用分形元设计理论进行设计, 首先要确定源生元素, 其次就是形态演变规律的作用方式——就是源生元素随形态演变规律而组合。源生元素在这个系统中是相互嵌套的, 它的演变过程是混沌的, 它具有不可控性。也就是说它所产生的

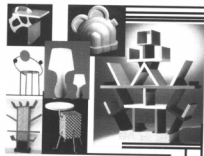


图 9.37 孟菲斯设计

形态具有相似性。

在产品设计中结构设计是真正的创新设计。分形的自相似性是其重要的特性，分形由公式的迭代产生。不同的公式应用产生出不同的结果，参数微小的变化对结果有巨大的影响。可以将公式、参数和无穷的迭代看作是分形的结构。这三者不变，分形的结构就保持一定。反之，分形的结构就发生变化。这对于分形元设计理论来说，源生元素在不同形态的形成过程中具有决定作用。不论形态演变规律如何变化，源生元素不同，生成的形态就不同。由此可知，在产品设计中结构设计是真正的创新设计。摩托罗拉的手机 v998 的设计，使手机设计告别直板形式，其升级产品如 v998++ 等多款形式具有相似性的手机一直在生产；v70 的旋转结构是其成功的基础。Nokia 的 9210c、9300 和 9500 等手机定位于高端的商务手机，其横翻盖设计容纳了键盘（与电脑键盘相仿），配合最先进的移动技术，是移动办公的优良选择。

根据分形理论，分形只存在于无标度区域，在现实设计中，源生元素和形态演变规律必然受到一定的限制。比如设计机载雷达，它必须首先满足机载的要求，过大的体积是不能接受的。但只是设计通讯设备，就可以适当放大体积了。设计一件产品并不需要拘泥于一定的形式。只要满足其所要满足的功能即可，也就是说无论什么形式都是人们定的，无所谓惟一的形式，也不需要这样。这也不满足个性化发展的要求。否则它的发展空间就受到极大的限制。例如 Nokia 的经典直板造型为其带来了巨大的成功，但随着手机市场的日趋成熟，折叠式手机有非常高的市场占有率，Nokia 适时推出了多款折叠手机。

分形具有无限精细的结构，设计应注意细节。每一件产品的设计不论设计得简约还是复杂，不论是规整还是相反都加入了这个公司对人的思考。这是模仿不来的。苹果公司的 ipod 设计得很规整。简约的设计并不是看上去用的造型元素少。一眼看上去没有深层的表达，只能叫简单，没什么值得欣赏的。一览无余不成艺术。提倡简约是提倡易用性，使产品更加人性化。专业的产品，为达到一定的技术水平和操作的易用性，设计得往往复杂一些。分形的自相似性即整体与局部和谐。就像中国的园林设计，明代家具。平面设计中构图是设计的重中之重。建筑设计中，房屋的结构决定怎样装修更加宜人。环境设计中，设计的重点必须突出。

（3）对设计意图表达的影响

采用由分形元设计理论形成的设计，它各部分和整体的相似性是非常明显的。这样的设计可能不容易马上被理解，但它会使人感到亲切，它使设计者要表达的思想由于相似性而易于被认知。这也使设计师和厂商的交流变得容易了。

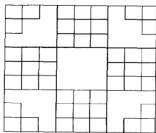


图 9.38 分形元

9.3.3 分形元设计原理在设计构成中的应用

设计构成是艺术类学科的必修课程，也是设计的基础，是艺术工作者的基本素质训练，包括平面构成、色彩构成和立体构成。将分形元设计原理应用在设计构成中，不仅可以加深艺术工作者对艺术的理解，而且对其理解分形的概念有很大的帮助。

① 以图 9.38 所示分形元进行叠加的平面构成 以图 9.38 所示分形元在 Photoshop 中进行透明度不同的叠加（图 9.39）。可以很容易地理解分形元在构成中的作用。

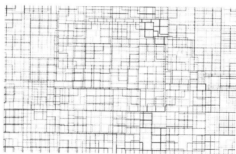


图 9.39 叠加而成的分形图 (李刚)

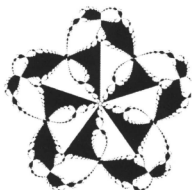


图 9.40 分形之花 (李刚)

② 用分形软件 Iterations 进行“花”的构成 (图 9.40) 这幅作品可以清楚地表示分形自相似的特性, 对色块的填充也是十分精确的。

③ 使用 Bracy 3D 软件将平面构成 (图 9.41) 转变为立体构成 (图 9.42) 将平面图形转变为立体图形对设计是十分有意义的, 这种转变不仅可以启发思维, 而且说明无论是平面设计还是立体造型设计, 它们的设计原理是相通的。



图 9.41 平面构成 (一) (李刚)

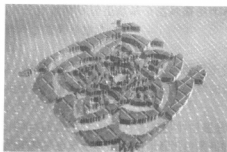


图 9.42 分形立体构成 (李刚)

④ 用分形软件 Iterations 进行对比与统一的构成 (图 9.43, 图 9.44) 都用到面积对比、形态对比和大小对比。两图的生成是非常规则的, 重点突出了图形的平衡感。

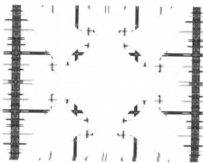


图 9.43 平面构成 (二) (李刚)

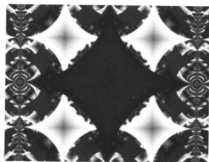


图 9.44 平面构成 (三) (李刚)

图 9.45~图 9.70 是十分典型的分形图案，详见彩图。

9.4 小结

① 分形 (Fractal) 是在非线性科学中发展起来的一个概念，泛指具有多重自相似的对象，既可以是自然存在的，也可以是人造的：花朵、树木、山川、云彩等都是典型的分形。

② 从设计数学的角度来看，分形是一种表现形式：从 (相对独立的) 对象 (分形元) —— 例如点、线、面或三角形 —— 开始重复应用一个规则，连续不断地改变，直至无穷，从而产生一系列美丽的造型。

③ 分形艺术是应用分形理论创作的艺术作品，反映分形理论的艺术作品类型非常广泛，包括数学公式直接生成的分形图形和反映分形理论的各种图形 (例如：艺术作品、产品设计和环境艺术等)。

④ 分形元是分形中构成分形整体的相对独立的部分，分形元设计是一种新的造型语言和设计方法。

⑤ 分形图案的复杂性来自简单数学关系的反复迭代，其结果有很强的视觉冲击力，其感召力寓于无穷层次局部与整体的自相似，理解其美学价值需要有一定的思想深度。分形艺术可启发设计师的灵感。

第三部分 设计数学实验

数学最本质的东西是抽象，抽象是人类创造性思维最基本的特征。设计作品作为美的对象在本质上必须是具象的，具象将设计对象具有的造型再现于图纸或画面。在设计中的具象和数学的抽象之间，存在着内在的相通性和联系性。

设计数学教学既是设计数学的学习也是设计数学的研究，要求把抽象的东西具象化，又通过直观的具象来深化抽象的内容。这种抽象中的具象，正是设计数学教学的真谛。

设计数学的教学是人类智慧的传递，需要高超的艺术。从教到学，从学到会，从会到用，又从用到创新，是一连串极为能动的过程，仅仅通过记忆一串串公式，证明一系列定理，计算一批批数据，解答一大堆习题的学习方法是难以学好设计数学的。设计师不仅需要有传统意义上的逻辑思维能力和几何直观能力，而且要求具有熟练的数学应用能力、实际设计能力和使用计算机解决实际问题的能力，设计数学试验正是基于这种需要而设立的。这是设计数学课程体系的主要内容和教学改革的重要举措。

设计数学实验和传统数学教学的重要区别有：

① 传统课程注重知识的传授和逻辑推理能力的培养，而设计数学实验则侧重于将实际问题转化为数学问题，培养用数学的观念去观察和把握现象，培养综合运用数学知识去分析和解决实际问题的能力，提高数学素质和数学修养；

② 传统课程的能力培养，主要指的是寻求解析解的能力，包括许许多多的解题技巧，而设计数学实验则侧重于创新意识和设计能力的培养，也就是运用现代计算机技术和软件包，来代替复杂的运算技巧或烦琐的手工绘图。

设计数学实验是加强实践性的一个重要环节。通过数学实验，一方面可以深入理解设计数学中的基本概念和基本理论，增强对设计数学的认识和兴趣，激发进一步学好设计数学的愿望，促进设计数学教学的良性循环；另一方面可以培养理性设计思维，训练设计表达能力，明确解决问题的思路，掌握解决设计问题的方法，从而能够得心应手地应用数学理论，开展设计活动。

第 10 章

设计数学实验概述



- 实验环境与实验步骤
- 基本数学软件
- 相关设计软件
- 小结

进行设计数学实验，要熟悉实验环境和实验步骤，实验环境分成硬件环境和软件环境，硬件环境本身要求不高，主要考虑生成图形过程中需要大量的内存，软件环境包括含有基本数学软件和专用分形软件的主导软件和提高设计能力、增强设计效果的辅助软件，实验步骤化是实验教学的主要内容。

随着计算机技术的发展，计算机的功能越来越强大，利用计算机进行数学运算来完成各种设计已经普及。通过设计数学实验，要能够深入理解数学实验的基本概念和基本理论，熟练使用相关软件，培养运用所学知识使用计算机解决实际问题的能力。

应用计算机完成数学实验，一方面可以进一步理解数学概念，直观地感受数学，并认识来自生产第一线的设计图形与抽象数学的理性知识息息相关，即具象的感性表达有深层的理性内涵，获得经过专业培训的设计与基础学科的数学之间直接联系的真切感受，加深对设计知识活学活用，相互贯通的整体认识；另一方面也学习和掌握一种新的设计工具，有效地利用数学方法，不必关心具体的计算与繁琐的推导，也可以摆脱乏味的设计表达和繁琐的手工绘图，集中精力于应用数学思维进行创意和构思，开展设计。

10.1 实验环境与实验步骤

10.1.1 硬件环境

实验运用的软件较多，数学软件 Mathematica、Maple 对系统的要求不是太高。Photoshop、CorelDraw 等软件所占空间较大，而分形软件 Ultra Fractal 3、Iterations 等所占空间较小，一般十几兆。考虑到在生成图形过程中仍需要大量内存，并鉴于计算机性能的不断提高，对设计数学实验用计算机环境的最低配置提供以下参考。

- CPU：Pentium III 566；
- 内存：128MB；
- 显卡：16MB 显卡，具有 3D 加速功能；
- 鼠标：三键鼠标；
- 硬盘：6G 以上；

- 显示器：支持 800×600 像素以上分辨率。

10.1.2 软件环境

设计数学软件提供了一个“活”的实验环境，能够动态应用于探索和研究设计数学问题，通过软件省去了复杂、重复的数学演算和耗费精力的计算机编程，真正集中智慧于问题的本质。常用设计数学软件有：由美国物理学家 Stephen Wolfram 领导的一个小组开发的 Mathematica，由加拿大 Waterloo 大学发展起来的一种数学软件 Maple，一种用于工程计算的高性能语言 Matlab 以及 Mathsoft 公司在 20 世纪 80 年代推出的优秀数学软件 MathCAD。

10.1.2.1 主导软件

主导软件主要分为两大类：基本数学软件和专用分形软件。基本数学软件主要生成函数图形，并通过叠加生成较复杂图形。基本数学软件包括 Mathematica、Maple、Matlab、MathCAD 等。本文实验部分以 Mathematica 和 Maple 两个软件为主。这两个数学软件在绘图方面功能较强。下面是几种数学软件的介绍。

① Mathematica：用户界面友好，使用方便，无论从二维到三维图形功能均很强，并推出了若干工具箱。

② Maple：无与伦比的符号计算能力，使其在符号计算的数学软件中独领风骚。

③ Matlab：数学功能强大，工具箱很多，是工程人员的必备工具。

④ MathCAD：集计算、图形、文字处理等功能于一体，而且是一个多媒体编辑平台。用户只需在工作页中像通常进行数学推导那样，输入公式、等式、不等式和数值等，MathCAD 就会计算出结果。

另一类主导软件是分形软件，种类较多，比如 Ultra Fractal、Iteration MFC Application 等。值得注意的是，分形软件生成复杂的尺度较大的图形会占用很多空间。Ultra Fractal 是一个不错的分形软件，界面友好，易于操作，图形色彩可以直接改变，可以进行各种变形。同时图形可以分层处理，进行叠加。图层概念对于学过 Photoshop 的读者并不陌生，图层可以看成一堆分割的文件叠在一起，每个图形放在一个图层，各图层之间相互独立，所显示的结果是所有图层上面图形的叠加。在一个图层上变化，不会影响到其他图层上面的图形，所以方便图形编辑。分形软件 Ultra Fractal 增加了不少分形效果，例如浮雕效果、水纹效果等。该软件上手快，易操作。Iteration MFC Application 软件与 Ultra Fractal 相比，其交互性较大，包含大量的生成公式，可进行参数变化。

总之，实验所涉及的主导软件功能较强，易操作，便于体验数学和设计的魅力，通过实际的练习可以不断提高绘图和设计能力。

10.1.2.2 辅助软件

辅助软件在于加强主导软件的设计能力，并丰富设计效果，包括一些必需的设计软件。比如 CorelDraw、Photoshop 等。

(1) CorelDraw 软件

CorelDraw 是 Corel 公司开发的图形软件，该公司在发展电脑绘图和商业应用上处于领先的地位。CorelDraw 是矢量图软件，而 Photoshop 则是位图软件。矢量图形通过直线和曲线（即所谓的“矢量”）来描述，矢量属性还包括颜色和位置属性。当编辑矢量图形时，实际上是在修改描述图形形状的直线和曲线的属性。可以移动、调整图形大小和

形状,改变图形颜色,这些修改丝毫不会损伤矢量图形的外观质量。矢量图形与分辨率无关,可以在不同分辨率的输出设备上显示矢量图而不会有任何质量损伤。所以 CorelDraw 在排版和绘图上功能较强,同时具备一般的图形处理能力,与 Photoshop 相比,处理图片的功能较弱一些。

(2) Photoshop 软件

Photoshop 是 Adobe 公司开发的图形处理软件。Adobe 公司开发了很多优秀的设计软件和应用软件,而 Photoshop 是位图软件中功能较强的一个。Photoshop 的主要功能是处理图形,是平面设计的必备工具。它采用位图图形,位图使用带颜色的小点(即所谓的“像素”)描述图形,将它们安排在网格内。当编辑位图图形时,修改的是像素而不是直线和曲线。由于描述图形的数据被固定在特定的网格中,所以位图和分辨率有关。编辑位图时会改变其外观质量。特别明显的是,当放大位图时,可看到图形边缘的锯齿,这是因为像素被重新分配到网格中的缘故。在比图形本身的分辨率低的输出设备上显示位图图形时也将导致图形外观质量下降。

10.1.2.3 软件关联

由于实验用到的软件种类较多,相互之间数据的交换和配合需要做出说明。在实验中,以主导软件为主,生成基本图形,或本身即可生成复杂图形。主图主要在数学软件 and 分形软件中生成,然后把生成的基本图形放到 Photoshop 软件中进行变化处理,也可进行合成使效果更加丰富多彩。同时应用 Photoshop 方便地调节图形色彩,并通过各种滤镜处理成特殊的视觉效果。CorelDraw 软件在平面图案设计方面较容易操作,比如角度旋转,比例缩放等,比传统平面构成快捷方便,一个好的想法可以很快表现出来。当然,一个好的设计需要多个软件的配合使用,只有熟练应用各类软件,才能把创意表现得淋漓尽致。

10.1.3 实验步骤

设计数学实验采用理论学习和上机实习相结合的方式,可按以下步骤进行。

① 明确实验目的和要求,在实验前要切实了解该实验的目的,实验过程中的要求和达到的最终目的。只有事先明确实验目的和要求,最后才能达到预期目标。

② 了解实验原理,结合实验目的,了解实验过程中的具体背景,相关建模和计算方法,包括条件的化简,因素的分离和变量的选择以及建立变量之间关系的数学方法,并对所建立的设计数学模型用到的理论知识和实现的计算机指令做出说明。

③ 熟悉实验工具,包括硬件环境和软件环境,尤其是软件环境中涉及到的通用数学软件、专用分形软件和相关设计软件,各有特色和优缺点,均要熟练掌握,做好上机实验准备。

④ 上机操作,根据实验内容应按部就班进行操作,用数学软件求出解析解、数值解和图形解,重点在图形解,最后保存实验结果,写出实验报告。

10.2 基本数学软件

10.2.1 Mathematica 基本操作

Mathematica (图 10.1) 是数学分析型软件,以符号计算见长,是集文本编辑、数学计算、逻辑分析、图形、声音、动画于一体的高度优化的专家系统,有高精度的数值计算功能和强大的图形功能。可直接将所要解的数学问题输入计算机,Mathematica 将自动给

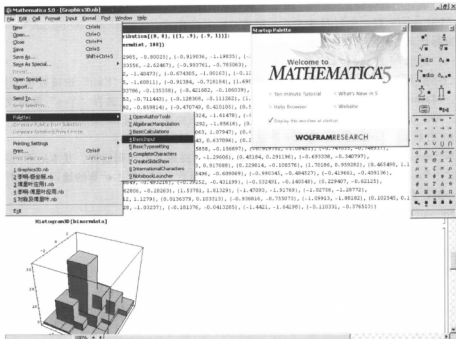


图 10.1 Mathematica 软件界面

出问题的相应解。Mathematica 的出现，使微积分、线性代数的计算以及函数画图等方面变得较为容易。

10.2.1.1 Mathematica 启动和运行

(1) 进入 Mathematica

在 Windows 环境下安装好 Mathematica，用鼠标双击 Mathematica 图标即可进入。首先显示版本信息，如果是新用户，需要输入帐号和密码。之后出现一空白工作窗口，称为工作区，Mathematica 将第一个工作区称为 Untitled-1，可以同时打开多个工作区，分别命名为 Untitled-2, Untitled-3, ..., 直到用户储存时重新命名为止。

(2) 在 Mathematica 中的运算

在工作区中输入要运算的表达式和指令，按 Shift+Enter 组合键，Mathematica 开始计算，如输入

1+1

然后按 Shift+Enter 组合键，很快会出现以下结果

In[1]:=1+1

Out[1]=2

Mathematica 将输入的指令用标题“In[1]:”标识，输出结果用“Out[1]”标识，其中数字“n”表示已经输入的指令数。

当完成一些计算后不得不中断，但希望再次开始工作时继续以前的计算，可以按如下步骤进行：退出 Mathematica 时系统会问是否保存计算结果，回答“是”。然后要求指定

一个文件名,用鼠标确认“OK”后系统就将该文件存在 Mathematica 的子目录下。再次进入 Mathematica 后,先打开该文件。再选“Kernel-Evaluate-Evaluate Notebook”一栏,点击鼠标后就可继续上次的计算。

(3) 退出 Mathematica

当结束 Mathematica 的工作时,可以选择“File”菜单中的“Exit”选项或单击关闭按钮。Mathematica 会询问是否保存对打开工作区内容的修改,选择“Yes”保存文件;选择“No”放弃保存;选择“Cancel”取消这次退出操作并返回 Mathematica。

10.2.1.2 Mathematica 基本量与基本运算

Mathematica 是多功能的计算工具,最基本的功能是算术四则运算。基本运算符号有加号“+”,减号“-”,乘号“*”,除号“/”和指数“^”。算术运算的输入方式如下。

expr: 直接输入表达式;

N[expr]: 要求计算表达式近似数值结果。

N[expr, n]: 要求计算表达式的数值,并给出 n 位十进制。

注意:表达式的括号只允许是圆括号(无论多少层)。

可通过“%”调用已有结果,进行下一步运算。具体地,“%”代表上面倒数第一个输出结果;“%%”代表上面倒数第二个输出结果;“%%”代表上面倒数第 n 行的输出结果。

Mathematica 允许一个表达式占用多个输入行,但必须在指令或语法告一阶段而又不完整的地方按 ENTER 键换行。

Mathematica 具有几百个常用数学函数,包括基本初等函数和一些特殊函数。下面给出一些常用的常数和内部函数。

① 常数: E ($e \approx 2.71828$)、 Pi ($\pi \approx 3.14159$)、 I 、Degree、Infinity (+) 和 -Infinity (-)。注意:重要常数第一字母都以大写字母表示。

② 常用内部函数: x^a (幂函数)、Abs [x] (x 的绝对值)、Sqrt [x] (x 的平方根)、Exp [x], a^x (指数函数)、Log [x] (自然对数)、Sin [x], Cos [x], Tan [x], Cot [x] (以弧度为单位的三角函数)、ArcSin [x], ArcCos [x], ArcTan [x], ArcCot [x] (反三角函数)、Log [b, x] (以 b 为底的对数)、Sinh [x], Cosh [x], Coth [x] (双曲函数)、ArcSinh [x], ArcCosh [x], ArcTanh [x], ArcCoth [x] (反双曲函数)、Round [x] (x 的整数值)、Random [] (在 0 和 1 之间的随机数)。

注意: Mathematica 内部函数的第一个字母也都必须以大写开头。函数中的自变量需用 [] 括起,而不用 (), 以便让计算机区分相乘和函数关系的两种不同情况。

另外,定义变量和函数如下:

在 Mathematica 中,变量是以字母开头的字符串,后接字母数字或下划线,在中间不能有空格。(注意:不能与 Mathematica 的内部函数名称相同)

变量赋值见表 10.1。

Mathematica 可以方便地定义自己需要的函数。它的一般格式见表 10.2。

表的生成见表 10.3。

10.2.1.3 Mathematica 图形绘制

(1) 基本曲线函数图形的绘制

Mathematica 在直角坐标系中作一元函数图形的基本命令见表 10.4。

表 10.1 变量赋值

Mathematica 命令	含 义
$X = \text{value}$	给 x 定义一个永远使用的值
$X = y = \text{value}$	同时给 x, y 定义一个永远使用的值
$X = y$	把 x 的值赋给 y
$\text{Expr}/, (x > xval, y > yval)$	在表达式 expr 中进行几个代换
$X = .$ 或 $\text{Clear}[x]$	清除给 x 定义的任何值

表 10.2 定义函数

Mathematica 命令	含 义
$f[x_] := \text{expr}$	定义以 x 为自变量的函数
$f[x_, y_, \dots] := \text{expr}$	定义以 x, y, \dots 为自变量的函数
$?f$	显示 f 的定义
$\text{Clear}[f]$	清除对 f 的所有定义

注意：下划线“ $_$ ”必不可少，在定义函数时，使用的符号是延迟赋值符号“ $:=$ ”。

表 10.3 表的生成

Mathematica 命令	含 义
$\text{Range}[nmin, nmax, dn]$	以 dn 为步长, 从 $nmin$ 到 $nmax$ 生成数值表
$\text{Table}[\text{expr}, \{n, nmin, nmax, dn\}]$	以 dn 为步长, 从 $nmin$ 到 $nmax$ 按表达式生成表

注意：当 $dn=1$ 时，可以省略不写； $dn=1$ 且 $nmin=1$ 时，两者皆可省去。当 $dn < nmin$ 时， dn 也可以取负值。

表 10.4 作一元函数图形的基本命令

Mathematica 命令	含 义
$\text{Plot}[f, \{x, xmin, xmax\}, \text{选择项}]$	在 $[xmin, xmax]$ 内画出函数 $y=f(x)$ 的图形
$\text{Plot}[\{f_1, f_2, \dots\}, \{x, xmin, xmax\}, \text{选择项}]$	同时画出几个函数 $f_1(x), f_2(x)$ 的图形
$\text{Show}[P_1, P_2, \dots, P_n]$	将函数图形 P_1, P_2, \dots, P_n 同时显示

当 Mathematic 画一条曲线图时，必须做许多选择，用什么样的比例，在函数的何处取点以及其他等。多数情况下，可由 Mathematic 自动完成。但如果想得到更符合特定目标的图形，就需加入选择项，通用格式是“选择项名称→选择项取值”。

Plot 常用的选择名及其缺省值见表 10.5。

表 10.5 Plot 常用的选择名及其缺省值

选择项名称	缺省值	含 义
PlotRange	Automatic	制定作图的坐标范围，也可用 $\{\}$ 或 $\{\{ \}, \{ \} \}$ 选择坐标范围
AspectRatio	1/Golden-Ratio	图形宽高之比。可选项取值 Automatic 将根据 $x-y$ 坐标的实际值来设定
AxesLabel	None	说明坐标上的标记符号，用 $\{\}$ 规定两个轴的标志
PlotStyle	Automatic	把曲线画成一定的宽度，画成虚线、使用某种颜色或灰度等

PlotStyle 常用取值见表 10.6。

表 10.6 PlotStyle 常用取值

选择项名	含 义
Thickness[t]	描述线的宽度，其中 t 是一个实数，说明要求的画线宽度，这是以整个图的宽度作为 1 计算，一般用的数应远小于 1
GrayLevel[i]	描述划线时使用的灰度，其中的 i 是一个 $[0, 1]$ 间的数，说明灰度的深浅，其中 0 表示黑色，1 表示白色
RGBColor[r, g, b]	说明颜色，其中 r, g, b 是三个取值在 $[0, 1]$ 间的数，说明所要求的颜色里红色、绿色、蓝色分别的强度
Dashing[{ d_1, d_2 }]	说明用怎样的方式画虚线。其中的 d_1, d_2 都是小于 1 的数，说明虚线的分段方式，这时也以图形的宽度为 1。Plot 将循环使用表里的数交替地作为分段和空白的长度

用图形元素绘图适合于绘制结构复杂的图形。Mathematica 中还提供了各种绘制点、线段、圆弧等的函数。同样可先用 Graphics 产生平面图形表达式，再用 Show 显示图形结果。

Mathematica 中常用的二维图形元素见表 10.7。

表 10.7 常用的二维图形元素

Point[{x,y}]	点
Line[{x1,y1},{x2,y2},...]	线段
Rectangle[{xmin,ymin},{xmax,ymax}]	填充矩阵
Polygon	[{x1,y1},{x2,y2},...]填充多边形
Circle[{x,y},r]	圆
Circle[{x,y},{rx,ry}]	半轴分别为 rx,ry 的椭圆
Circle[{x,y},r,{theta1,theta2}]	圆弧
Circle[{x,y},{rx,ry},{theta1,theta2}]	椭圆弧
Disk[{x,y},r]	填充圆
Raster[{a11,a12,...},{a21,...},...]	灰度在 0~1 之间的灰层组
Text[Expr,{x,y}]	文本大小

图形颜色、曲线形状和宽度等图形样式见表 10.8。

表 10.8 图形样式

GrayLevel[]	灰度介于 0(黑)到 1(白)之间
RGBColor[r,g,b]	由红、绿、蓝组成的颜色，每种色彩取 0 到 1 之间的数
Hue[A]	取 0 到 1 之间的色彩
Hue[h,s,b]	指定色调、位置和亮度的颜色，每项介于 0 到 1 之间
PointSize[d]	给出半径为 d 的点，单位是 Plot 的一个分数
AbsolutePointSize[d]	给出半径为 d 的点(以绝对单位量取)
Thickness[w]	给所有线的宽度 w，单位是 Plot 的分数
AbsoluteThickness[w]	给所有线的宽度 w(以绝对单位量取)
Dashing[{w1,w2},...]	给所有线为一系列虚线，虚线段的长度为 w1,w2,...
Absolutedashing[{w1,w2},...]	以绝对单位给出虚线长度
PlotStyle->Style	设立 Plot 中所有曲线的风格
PlotStyle->[{Style1},{Style2},...]	设立 Plot 中一系列曲线的风格
MeshStyle->Style	设立宽度和表面网格的风格

每次绘制图形后，Mathematica 保存了图形的所有信息，用户可以重绘这些图形。在重绘图形时，还可以改变一些特征。常用重绘图形函数见表 10.9。

表 10.9 常用重绘图形函数

Show[plot]	重绘图形
Show[plot,option->value]	改变方案重绘图形
Show[plot1,plot2,plot3,...]	多个图形的绘制
Show[GraphicsArray[{plot1,plot2,...}]]	绘制图形矩阵
InputForm[plot]	给出所有的图形信息

(2) 二维参数作图

前面使用 Plot 命令可以绘出直角坐标系下的函数图形，使用 ParametricPlot 可以绘

制参数曲线。ParametricPlot 常用形式见表 10.10。

表 10.10 ParametricPlot 常用形式

ParametricPlot[{fx,fy},{t,tmin,tmax}]	绘出参数图
ParametricPlot[{fx,fy},{gx,gy},..., {t,tmin,tmax}]	绘出一组参数图
ParametricPlot[{fx,fy},{t,tmin,tmax},AspectRatio→Automatic]	设法保持曲线的形

(3) 基本三维图形

绘制函数 $f(x, y)$ 在平面区域上的三维立体图形的基本命令是 Plot3D。Plot3D 和 Plot 的工作方式和选项基本相同。ListPlot3D 可以用来绘制三维数字集合的三维图形，其用法类似于 ListPlot，下面给出这两个函数的常用形式：

Plot3D[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}] 绘制以 x 和 y 为变量的三维函数图形；

ListPlot3D[{Z11,Z12,...},{Z21,Z22,...},...] 绘出高度为 Z_{vr} 数组的三维图形。

Plot3D 同平面图形一样，也有许多输出选项，可通过多次实验找出所需的最佳图形样式。可选项见表 10.11。

表 10.11 Plot3D 可选项

选 项	取 值	意 义
Axes	True	是否包括坐标轴
AxesLabel	None	在轴上加上标志; xlabel 规定 x 轴的标志, {xlabel,ylabel,zlabel} 规定所有轴的标志
Boxed	True	是否在曲面周围加上立方体
ColorFunction	Automatic	使用什么颜色的明暗度; Hue 表示使用一系列颜色
TextStyle	STextStyle	用于图形文本的缺省类型
FormatType	StandardForm	用于图形文本的缺省格式类型
DisplayFunction	SdisplayFunction	如何绘制图形, Identity 表示不显示
FaceGrids	None	如何在立体界面上绘上网格; All 表示在每个界面上绘上网格
HiddenSurface	True	是否以立体的形式绘出曲面
Lighting	True	是否用明暗分布来给表面加色
Mesh	True	是否在表面上绘出 xy 网格
PlotRange	Automatic	图中坐标的范围; 可以规定为 All, {xmin,xmax} 或 {xmin,xmax},{ymin,ymax},{zmin,zmax}
Shading	True	表面是用阴影还是留空白
ViewPoint	{1.3,-2.4,2}	表面的空间观察点

(4) 三维空间的参数方程绘图

三维空间中的参数绘图函数 ParametricPlot3D[{fx,fv,fz},{t,tmin,tmax}] 和二维空间中的 ParametricPlot 相仿。在此情况下，Mathematica 实际上根据参数 t 来产生系列特征点，然后再加以连接。其中，三维参数作图的基本形式见表 10.12。

(5) 绘制等高线与梯度线

绘制等高线与梯度线的命令见表 10.13。

ContourPlot 命令中常用的选择项见表 10.14。

表 10.12 三维参数作图的基本形式

<code>ParametricPlot3D[(fx,fy,fz),{t,tmin,tmax}]</code>	给出空间曲线的参数图
<code>ParametricPlot3D[(fx,fy,fz),{t,tmin,tmax},{u,umin,umax}]</code>	给出空间曲面的参数图
<code>ParametricPlot3D[(fx,fy,fz,s)***]</code>	按照函数关系 s 给出参数图的阴影部分
<code>ParametricPlot3D[(fx,fy,fz),{gx,gy,gz}***]</code>	把一些图形绘制在一起

表 10.13 绘制等高线与梯度线的命令

Mathematica 命令	含 义
<code>ContourPlot[f[x,y],{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},选择项]</code>	绘制曲面 $z=f(x,y)$ 的等高线

表 10.14 ContourPlot 命令中常用的选择项

选择项	缺省值	含 义	选择项	缺省值	含 义
Contours	10	等高线的条数	ContourShading	True	是否使用明暗度
PlotRange	Automatic	可以指定 z 的取值范围	PlotPoints	15	每个方向上计算的点数

10.2.2 Maple 基本操作

Maple (图 10.2) 是由加拿大 Waterloo 大学研发的数学软件, 与其他数学软件相比, 更适于表现空间造型。另外, 由于宜人的操作界面以及与 mathematic 相似的操作环境, 再结合一点 C 语言知识, 即可轻松上手。

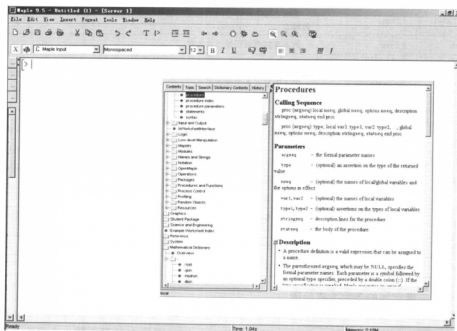


图 10.2 Maple 软件界面

10.2.2.1 Maple 的启动及运行界面

在 Windows 下启动 Maple 软件所显示的界面内容与大多数的 Windows 应用程序一样, 包括菜单栏、工具栏、状态栏等。界面的中央空白区是用来输入命令、表达式以及结

果输出的工作簿。

① File 菜单 包含了一般 Windows 应用程序有关文件的操作,其用法与 Mathematica 相同。

② Edit 菜单 用来对 Maple 的输入进行编辑。其中, Cut, Copy, Copy as Maple Text, Paste, Paste Maple Text, Delete Paragraph 和 Select All 命令称之为块操作命令。Copy as Maple Text 将选定的内容以 Maple9.5 的文本格式复制到 Windows 系统的剪贴板,同时保留原位置的选定内容; Paste Maple Text 命令将选定的内容以 Maple 的文本格式复制到指定的位置。Delete Paragraph 命令是删除 “[” 命令,它的用法是:首先将光标移到需要删除的块上,然后删除即可。

Hyperlinks 用于编辑当前工作簿中存在的与其他文档之间的链接; Split or Join 命令可以将光标所在位置的内容分割与合并其子菜单。

Split Execution Group 与 Join Execution Group 命令分别用于将光标所在位置的内容分割与合并。而 Split Section 与 Join Section 命令主要用于对具有层次结构的文档单元的操作。

③ View 菜单

View 菜单用于调整工作簿的显示方式。

Toolbar 用于工具栏的显示与否,它使用命令便于操作。

Context Bar 命令用于内容工具栏的显示与否。

Palette 的子菜单。用于显示 Maple 中的各种菜单。Expression 用于显示表达式面板; Symbol 用于显示符号面板; Matrix 用于显示矩形面板; Vector 用于显示向量面板。Show All 用于显示所有面板; Hide All 用于隐藏所有面板。

Zoom Factor 用于控制形式比例。

Expand All Sections 与 Collapse All Sections 命令用于段落控制。Expand All Sections 用于扩展全部段落; Collapse All Sections 用于压缩全部段落。

④ Insert 菜单

Insert 菜单用于在工作簿中插入文字与对象。

Text 用于在光标所在的位置输入必要的注释,以增强工作簿的可读性。

Standard Math 用于插入不可被 Maple 所执行的标准数学表达式。

Maple Input 用于插入可以被 Maple 所执行的命令行。

Standard Math Input 用于插入可以被 Maple 所执行的标准数学表达式。

Execution Group 的子菜单有 Before Cursor 与 After Cursor 两个。用来在当前执行块的前面与后面插入可执行块。

Plot 的子菜单可以插入二维与三维图形,其命令分别为 2-D, 3-D。

Spreadsheet 用于插入表格。

Section 用于在段落后面插入主段。

Subsection 用于在段落后面插入子段。

Hyperlink 用于插入超链接。

⑤ Format 菜单 Format 菜单中的命令主要用于修改 Maple 工作版面的布局。

Styles: 选择用户喜欢的样式。

Character: 选择文字样式。

Paragraph: 选择版面样式。

Page Numbers: 用于设置页码。

Convert to: 可以将工作簿转换为 Maple Expression (数学表达式) 和 Maple Input (Maple 输入) Hyperlink (超链接)。

⑥ Windows 菜单 用于设置 Maple 系统的窗口。包括 Cascade (层叠), Tile All (平铺), Tile Horizontal (水平排列), Tile Vertical (垂直排列)

⑦ Help 菜单 全方位满足不同情况下的用户需求。

Introduction: 通过它可以对 Maple 有一个初步的了解。

New Users: 通过它可以对 Maple 有一个详细的了解。

在具体的使用过程中, 最常用的帮助信息的获得可以通过 “?” 命令来得到。例如: 输入 “?local” 就可以得到有关 “local” 的信息。

10.2.2.2 Maple 基本量与基本运算

(1) 特殊符号

特殊符号包括: “;” 命令终止符号、“:” 不在屏幕上显示结果的命令终止符号、“:=” 用于赋值、“%” 省略符号 (用于显示结果)、“.” 用于字符串连接或浮点数中使用、“..” 表示取值范围、“*” 强制性乘法记号、“@” 用于函数的复合、“!” 阶乘符号、“()” 表示函数的参数、“->” 用于定义函数 (它由减号与大于号组成)、“[]” 表示列表、“{ }” 表示集合、“\$” 表示重复、“::” 检查过程参数的类型、“?” 帮助。

(2) 作图命令

由 “With” 加载软件包, “Graphics;” 是作图命令。其中, 二维函数作图用 plot (expr, x=a..b) 命令; 三维函数作图用 plot3d (expr, x=a..b, y=c..d), expr 是表达式, 而 a 与 b, c 与 d 表示函数的取值范围。要把几个图合并起来可以用 plots [{ }]。

(3) Maple 的数据类型

① 简单的数据类型 Maple 简单的数据包括整数、分数、浮点数和复数 (由数字 0~9 以及表示指数的 e、表示虚数单位的 I 组成)。在 Maple 中不限制整数的大小及浮点数小数后的位数 (默认为 10 位)。用户可以根据自己的需要调整显示的位数。

例如 > evalf(1/7);

0.1428571429

> evalf(1/7, 13);

0.1428571428571

其中 evalf () 函数用于求表达式的浮点数数值, 而 13 表示精确到 13 位。如果是浮点数, Maple 始终按照输入的最多的一个数的精度对其进行处理。

如果输入的是分数, 则会对其化简并精确地保留其数值。

> 94+255/25;

521/5

② 序列 (sequence) 序列可以理解有限或无限的有一定顺序的一列数。Maple 中用 seq 函数来产生有限的序列, 各项之间用 “,” 来分开; 各项可以是数字, 也可以是数学表达式, 也可以是其他的数据类型。可以用 “[]” 来访问其中的元素。

```

例如 > x:=seq(i^3,i=1..10);
      1,8,27,64,125,216,343,512,729,1000
      > x[2];

```

8

在序列中，变量的步长为 1，故用户要通过一定的办法来改变步长。

③ 集合 (set) 用 “{ }” 来定义，元素之间用 “,” 隔开，Maple 中的集合与数学中的集合概念一致，定义的集合元素有一定的顺序：先数字，后符号，访问集合中的元素用 op 函数。

```

例如 > s1:={1,2,b,3,c};
      s1:={1,2,3,b,c}
      > s2:={1,2,b,3,c,d};
      s2:={1,2,3,b,c,d}
      > op(3,s1);

```

3

④ 列表 (list) 用 “[]” 表示，元素之间用 “,” 隔开，Maple 将列表理解成数字对象的有序集合，对列表的顺序不变。相对于集合而言，列表更像矩阵中的一列元素，它是处理向量、矩阵、张量的基础。访问其中的元素可以用 op 函数，也可以用 Listname (index) 函数，不同之处在于前者产生的是一个序列，后者产生的是一个列表。

```

例如 > s1:=[ x,y,23,z,4];
      s1:=[ x,y,23,z,4]
      > op(s1);
      X,y,23,z,4
      > op(3,s1);
      23
      > s1[2..4];
      [y,23,z]

```

如果结合 seq 函数，将会产生复杂的值表，例如

```

> [seq([i,i^2,i^3],i=1..5)];
      [1,1,1],[2,4,8],[3,9,27],[4,16,64],[5,25,125]]

```

⑤ 数组 (array) 用 array () 函数来定义数组。判断哪些元素赋值可用 indices () 函数，用 entries () 函数可以确定元素所赋之值。数组的下标不但可以是自然数也可以是非正整数。定义二维数组用 array [1..m, 1..n] 的格式，它定义的是一个 m 行 n 列的数组，可以用 arrayname [1, J] 的格式来访问二维数组中的元素。在定义数组时，使用 symmetric (对称矩阵)、antisymmetric (反对称矩阵)、diagonal (对角阵)、sparse (零矩阵) 和 identity (单位矩阵)，将会产生特殊的矩阵。另外也可以用 convert () 函数来将列表转换为一维数组，将一维数组转换为集合。

```

例如 > s:=array(1..6);
      s:=array(1..6,[ ])
      > print(s);
      [s1,s2,s3,s4,s5,s6]

```

其中“[]”表示数组中各个元素的值为空值。

⑥ 表 (table) “表”类型的数据类似于“列表”类型，即元素的集合。不同的是列表的数据类型必须全部是数值类型结构，而表中的元素可以是任何数据类型。在 Maple 中用 table () 函数创建一个表。

例如 `t1:=table([first="first", second="second", third=3]);`

如果要对已经定义的表增加新的项目时，只需增加新项目的索引和值即可。

例如 `t1[fourth]:="add";`

如果要打印，则只需输入 `print(t1);` 即可。

结果 `table([first="first", second="second", third=3, fourth="add"])`


定义一个项目时，索引可以是数字，是符号，也可以是其他的字符串，如果增加的项目没有赋值，则在打印表时不会出现该项目，即没有值的项目实际上是不存在的。

10.2.2.3 Maple 图形绘制

Maple 图形的绘制包括二维与三维图形。二维图形的绘制用 plot () 命令；三维图形的绘制用 plot3d () 命令。在图形生成后，点击图形就会出现工具条，它可以方便地改变图形的显示方式。工具条中的图标功能如下。

 用线的方式显示图形。

 用点的方式显示图形。

 用带网格的多边形方式显示图形。

 用色块方式显示图形。


 表示在图形的周围添加矩形线框。


 以纵坐标与横坐标显示。

 以默认方式显示图形。

 不显示坐标。

 含有下面 3 个子菜单，用于图形的显示。

 Point Probe 用于改变三维图形的视角。

 Scale 用于改变图形的大小。

 Pan 用于图形的移动。

也可以通过点击右键的方式来改变图形的显示方式、色彩等。

通过 Style 命令下的子菜单 Line、Point、Patch、Patch w/o Grid、Patch and Contour、Hidden Line、Contour、Wireframe、Default 等命令可以获得图形的各种显示方式以及线宽、线形等。

通过 Color 命令下的子菜单可以改变图形的色彩（包括图形的整体与局部的色彩）。

通过 lighting 命令下的子菜单可以改变三维图形的灯光设置。

通过 axes 命令下的子菜单可以改变图形的坐标显示。

通过 Scaling Constrained 命令可以改变图形的显示大小。

通过 Export 下的子菜单命令可以设置图形的导出格式。

Transform 命令等价于 ，它可以改变图形的视角、大小、位置。

Animation 命令用于动画。

在使用 Maple 作图时,通过右键以及一些常用工具栏可以减少工作量,更重要的是它们可以方便地改变图形的显示、色彩等。

10.2.3 分形软件基本操作

10.2.3.1 Iteration MFC Application 基本操作

(1) Iteration MFC Application 简介及运行要求

Iteration MFC Application 简称 Iterations,由 Perception Graphics 公司出品。Iterations 由 Visual C++ 编写,具有较强的兼容性。Iterations 对计算机的硬件设备要求较低,486 的中央处理器,8M 的内存,支持 256 色显示的配置即可运行。它可运行在 Windows 95 及以上版本的操作系统中 (Windows NT 操作系统也可运行),支持最大显示为 3564×2784 像素,操作十分便捷,局部放大十分方便,这对创作分形图形很有帮助。其输出图形的格式为 BMP 格式,可使输出图形色彩和精度不受损失,也可以制作分形动画,以 AVI 格式输出。

(2) Iterations 用户界面

运行 Iterations,出现如图 10.3 所示的操作界面。分辨率的大小决定显示区域,图 10.3 所示为 1024×768 的分辨率。Iterations 界面主要分为菜单区、工具栏、视窗区、坐标辅助区几大部分。

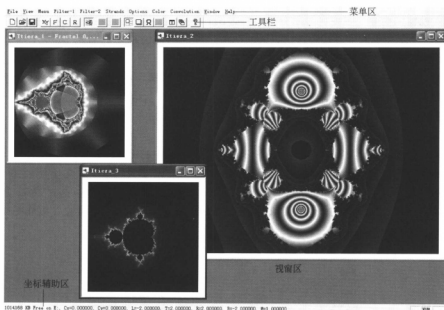


图 10.3 Iterations 操作界面

① 菜单区简介 Iterations 的所有操作都可以在菜单区 (图 10.4) 中完成。其中 File 菜单包含新建、打开、保存、退出和显示最近文档等常用命令; View 菜单中工具栏和状态栏的隐藏工具在大多数情况下均为勾选。放大和缩小工具可以在分形图中直接操作。Orbit 及以下三种坐标命令可以使用户更容易理解分形图形的结构。Movie Dialog、Movie

图 10.4 Iterations 菜单区

和 Video Player 在制作动画时使用；Menu 菜单是软件应用的重点，包括生成分形图形最基本的公式。在使用过程中可积累很多经验。比如，Raphson 中有很多关于 Newton 算法的公式。例如 $c = \log(\text{Mag}^{\wedge} \text{Pwr})$ 命令，它可以使图形产生类似万花筒似的效果；Filter-1、Filter-2 和 Strands 菜单可对分形图形进一步设计，可配合 Menu 菜单调整分形图形的形态。Options 菜单的命令是迭代的方式，如 $z = z.\text{csin}()$ ，这些命令在每次迭代运算后都执行；Color 菜单主要设置尺寸和颜色，如 Color Parameters 使颜色循环显示；Convolution 菜单使分形图形出现一些特殊效果，比如 Sharpen 使图形锐化；Window 菜单使操作和理解更容易，比如 New Window 重复渲染当前窗口，Tile 使各窗口全部平铺显示；Help 菜单包括版本信息和操作命令的解释。在使用当中有不明确的情况下可使用 Help 命令。

② 工具栏简介 就是将常用命令设为图标，方便调用（图 10.5）。



图 10.5 Iterations 工具栏

③ 视窗区简介 视窗区显示分形图形，Iterations 软件的优点在于多窗口操作十分便利，用户可以方便地生成切合自己想法的图形。显示图形的尺寸范围是 160×120 像素至 3564×2784 像素，能够满足大多数情况下的使用。

④ 坐标辅助区简介 坐标辅助区可以实时显示分形图形的基本信息，例如图形存储所占用的空间和图形的基本参数。在分形图形创作中，参数值微小的变化都会使所产生的图形变化，用户可通过变化参数来对分形图形进行调整。

(3) Iterations 操作实例

首先新建一分形图，在 Menu 菜单下选择 Custom 中的第 80 个命令 ($F(z) = z + c$)；在 Color 菜单下选择 Size 命令，将分辨率改为 800×600 ；在 Filter-1 菜单下选择第 10 个命令 ($\text{if}(\text{abs}(\sin x)) \leq [0.25, 1.25, 1.5, 1.75, 2]$)；然后在 Options 菜单下选择第 33 个命令 ($z = z.\text{clog}()$)；最后再在 Color 菜单下选择 Color Parameters 命令，设置参数如图 10.6，生成优美的分形图。

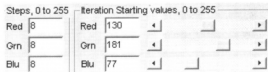


图 10.6 设置参数

10.2.3.2 Fractint 20.0 基本操作

(1) Fractint 20.0 简介及运行要求

Fractint 20.0 是一个优秀的分形软件，它可以制作许多类型的分形图，尤其一些经典

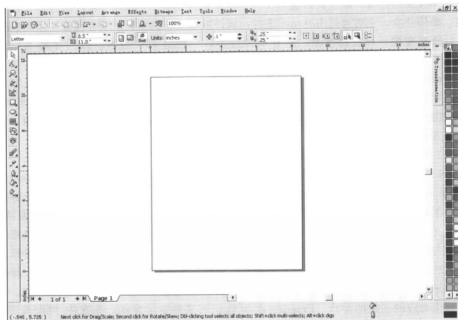


图 10.8 CorelDRAW 软件界面

命令使用与 Mathematica 相同。

② 编辑菜单 包括“Undo (撤销)、Delete (删除)、Redo (重做)、Repeat (重复)、Cut (剪切)、Copy (拷贝)、Paste (粘贴)、Paste Special (选择粘贴)、Symbol (类型)、Duplicate (多次复制)、Copy Properties From (复制属性于)、Select All (全选)、Find and Replace (查找与替换)、Insert (插入)”等命令。这些命令主要用于对图形的编辑。其中，Symbol (类型) 下有“新类型、编辑类型、转化为物体”等命令；Insert 用于插入条形码、网络图形、新物体等命令；Properties 命令用于图形属性的编辑。

③ 视图菜单 主要用于视图的显示与控制。Simple Wireframe (简单线框)、Wireframe (线框)、Draft (草图)、Normale (常规视图)、Enhanced (加强视图) 用于图形的显示方式，在不同的场合它们有不同的用途。Full-Screen Preview (全屏显示)、Preview Select Only (所选图形全屏显示) 用于图形的显示大小。Rulers (标尺) 用于标尺的显示与否。Grid (网格) 用于网格的显示与否。Guidelines (参考线) 用于参考线的显示与否。Show 用于显示：页边界、出血、打印范围等。Snap To Grids (对齐网格)、Snap To Guideline (对齐参考线)、Snap To Objects (对齐物体) 等命令用于图形的对齐。Grid and Ruler Setup (设置网格与标尺)、Guidelines Setup (设置参考线)、Snap to Objects Setup (用于设置对齐物体的特性) 等命令用于设置对齐的对象。

④ Layout 菜单 主要用于工作界面内页数的控制。有 Insert Page (插入页)、Delete Page (删除页)、Rename Page (重命名页)、Go To Page (转到第几页)、Page Setup (页设置)、Page Background (页背景)。

⑤ 排列菜单 主要用于图形的变换、对齐、群、打散群组、次序、结合、分离、锁

定、解锁、转换物体为曲线、转换轮廓为对象等命令。其中变换命令下有子菜单，它用于图形的位置变换、旋转、大小等变化。Align and Distribute 命令用于图形的对齐方式；Order 命令用于图形的显示次序。

⑥ 效果菜单 主要用于对图形添加一定的艺术效果。值得一提的是信封命令与容器命令。信封命令是把一个或一些图形置于某一固定的图形中，然后改变这个图形的形状，则被置于此容器中的图形会随之变化。容器命令是把某些（一个或几个）图形置于某一固定的图形中，在此容器外的部分将被剪切。

⑦ 位图菜单 主要用于对位图的编辑，其基本用法同于 Photoshop 中的用法。故在这里不作过多的介绍。

⑧ 文字菜单 主要用于对文字的处理。Format Text，用于文字格式的编辑；Fit Text To Path，文字适配路径；Fit Text To Frame，文字图框；Link，文字链接。

⑨ 工具菜单 主要用于对一些常用工具的设置、显示等的控制。Options，选项；Customization，自定义；Colour Management，色彩控制；Save Settings As Default，保存设置作为默认项；Color Style，色彩类型；Palette Editor，调色板编辑；Graphic and Text Styles，图形与文字编辑。

⑩ 窗口菜单 主要用于对多个窗口的排列显示。New Window，创建新窗口；Cascade，层叠窗口；Tile Horizontally，水平排列窗口；Tile Vertically，垂直排列窗口；Close，关闭窗口；Close All，关闭所有窗口；Refresh Window，刷新窗口。

(2) 属性栏

属性栏用于绘制图形的属性显示以及编辑，对应不同的图形有不同的属性栏（图 10.9）。



图 10.9 CorelDRAW 属性栏

在 CorelDRAW 中，属性栏是一个极为有用的工具栏。它不仅可以方便地改变图形的大小、方向等，而且可以准确设置图形的属性。

(3) 工具条

工具条是一个编辑基本图形及变化的工具箱。从上到下的图标命令如下。

- ① 选取工具：用于对对象的选取。
- ② 编辑工具：用于对对象的节点的编辑、对象的割断、擦除、模糊等处理。
- ③ 放大镜工具：用于对象的放大、缩小、平移。
- ④ 自由笔工具：用于线的绘制、艺术笔的绘制、标注、三点画曲线等。
- ⑤ 智能绘图工具：系统根据输入自动地进行平滑处理等。
- ⑥ 矩形工具：用于矩形的绘制。
- ⑦ 椭圆工具：用于椭圆的绘制。
- ⑧ 图纸工具：用于多边形、螺旋线、表格的绘制。
- ⑨ 基本图形工具：用于基本图形的绘制。
- ⑩ 文字工具：用于文字的输入。
- ⑪ 交互渲染工具：用于图形的渐变、扭曲、三位立体、阴影、透明等处理。

- ⑫ 吸管工具：用于色彩的提取，它常与油漆桶工具配合使用。
- ⑬ 轮廓笔工具：用于设置图形轮廓的粗细。
- ⑭ 填充工具：它可以提供图形的渐变、肌理、全色彩等类型填充。
- ⑮ 交互式填充：它可以提供交互式填充与交互式网格填充。

(4) 调色板

可以通过工具菜单中的调色板编辑，来控制调色板的类型与显示。在默认设置中为 RGB 色。

10.3.2 Photoshop 基本操作

Photoshop (图 10.10) 是 Adobe 公司推出的一款功能十分强大、使用范围广泛的平面图形处理软件。无论是平面广告设计、室内装潢，还是处理个人照片，Photoshop 都已经成为不可或缺的工具。Photoshop 的一些实用功能如下。

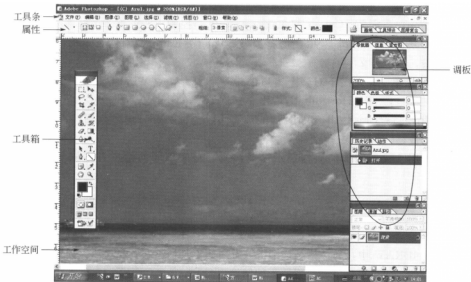


图 10.10 Photoshop 软件界面

① 功能强大的选择工具：Photoshop 拥有多种选择工具，极大地方便了用户的不同要求。而且多种选择工具还可以结合起来选择较为复杂的图形。

② 制定多种文字效果：利用 Photoshop 不仅可以制作精美的文字造型，而且还可以对文字进行复杂的变换。

③ 多姿多彩的滤镜：Photoshop 不仅拥有多种内置滤镜可供用户选择使用，而且还支持第三方的滤镜。这样，Photoshop 就拥有了“取之不尽，用之不竭”的滤镜。

④ 易学易用，用途广泛：对 Photoshop 不了解的人常常认为它是一种专业图形图像处理软件，其实这是一种误解，Photoshop 虽然功能强大，但是也易学易用，适应于不同水平的用户。

Photoshop 的基本操作模式如下。

(1) 标准屏幕模式

标准屏幕模式，通常包括标题栏、工具条、工具箱、调板、状态栏等。状态栏位于窗口的最下面，用于显示文档的大小、比例、当前使用的命令等信息。调板和工具条都可以自由移动，如果调板的位置太乱，想恢复到初始状态，只需要在窗口→工作区→复位调板位置即可。

(2) 工具条

工具条包含文件、编辑、图形、图层、选择、滤镜、视图、窗口、帮助 9 个部分。文件包括新建文件、保存文件、另存文件、输入输出、打印等基本的部分，在此就不一一解释了。编辑部分包含基本的变换、描边、定义画笔图案等；图形包括图形的模式及 RGB、CMYK、灰度等模式。还包含图形的大小、画布的大小、图形的旋转等功能。图层包括新建图层、复制图层、合并图层、图层效果的设置等，图层使用的熟练程度决定了工作效率的高低。选择包含选择区域的扩大、存储等功能。滤镜包括很多，扭曲、杂色、模糊、渲染、艺术效果、纹理等，效果很多，为处理图形提供了选择的余地。视图、窗口和帮助的内容比较简单，读者可自己查阅。

(3) 工具箱

工具箱里的工具比较多，如图 10.11，图形中有黑色的边角表明里面还隐藏着图表。现在介绍几个基本的功能。移动工具是在选取物体的情况下，才可以移动。当物体被锁定时就不可以被移动。魔术棒和套索工具都是用来选择区域的，比如在某张图形上把一个物体给扣下来，这个时候就要先选取它。画笔工具是用来绘画的工具，它包括铅笔、画笔和喷枪。它们的属性透明度、混合模式、淡化、湿润边缘等都可以在属性栏里设置。渐变工具，用渐变工具单击并拖拉图形，就可以得到不同的效果，在选项栏里可以选择不同的渐变效果。渐变设置包括如下。

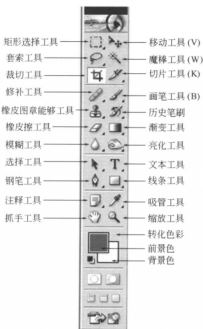


图 10.11 Photoshop 工具箱

- 线性渐变：设置长度来提供渐变效果。
- 径向渐变：以单击处为圆心，外缘发生渐变。
- 角度渐变：像雷达电波一样，以一个点为中心，向外辐射。第一次单击的点是圆心，拖动鼠标测定渐变的角度。
- 对称渐变：提供和线性渐变相似的渐变。就像渐变发生了两次，是背对背的。
- 菱形渐变：和径向渐变相似，该渐变不是圆的，而是以方形出现。

10.4 小结

① 设计数学应用性较强，通过实验加深对理论知识的认识与理解，在熟悉设计数学

软件的过程中，通过丰富多彩的实验训练，加深对数学美和艺术美的理解，同时自己动手使数学与艺术的紧密联系在数学实验中得到完美表现。

② 设计数学实验应用的主导软件包括基本数学软件（Mathematic 和 Maple 等）和专用分形软件（Fractint 和 Iteration MFC Application 等）两大类。主导软件功能强大，易操作，便于体验数学和设计的魅力。

③ 设计数学实验应用的辅助软件包括 CorelDraw、Photoshop 等配套设计软件，其目的在于加强主导软件的设计能力，并丰富设计效果。

④ 设计数学重在实践，设计数学教学要求多上机，多动手，在实践中学习，在设计中进步。设计数学实验采用“作图形”、“搞设计”来“学数学”的方式，自己动手计算、实验、验证、探索、求解，得到所需的设计图形。

⑤ 设计数学实验的目的是学习数学理论和设计方法，掌握一些特定的思想和技巧，为后继课程打下扎实的基础，同时从自己的数学发现和设计实践中提高学习兴趣。

第 11 章

函数、微积分和级数的图形实验



- 函数图形实验
- 微积分图形实验
- 级数图形实验
- 小结

绘图从来都是数学的重要手段，借助图形，往往可以化繁为简，使抽象的对象得到明白直观的体现，因此，设计数学教学离不开图形实验，借助直观的图形，可以容易地接受数学理论和数学知识，尤其是高等数学中的许多函数，其解析式往往令人望而生畏，即使对其内涵作详尽分析，仍然感到难明道理，如果自己作图，再配合理论分析，问题很快迎刃而解。

传统的手工作图，往往费力耗时，效果不尽理想，图形实验恰好弥补了这个缺陷。在计算机里可以方便地指定各种视角、比例、明暗，从各个角度进行观赏，特别是动画功能，使以往难以表现的动态过程可以得到生动的展示，从而使图形的作用日益突出。

函数、微积分和级数的图形实验介绍了高等数学中常用概念的图形及其傅里叶展开的节奏图案，一方面，简单介绍常用数学软件的作用功能，可以使读者体验到其函数作用，尤其是在动画制作过程中其功能非常简单而又强大；另一方面，展示了高等数学图形的数学美和艺术美，可以使读者体会到高等数学中大量曲线曲面蕴涵着深刻的艺术美的表现形式，揭示设计艺术形式规则中的数理内涵，为设计艺术形式增添了理性化的设计表达方式。

11.1 函数图形实验

实验 1 一元函数图形

[实验目的和要求]

- ① 学习用 Mathematic 绘制一元函数图形，即平面曲线。
- ② 通过图形认识函数，观察函数的图形特征，建立数形结合的思想。
- ③ 通过本实验初步认识一元函数图形和平面艺术图形的关系，谈谈体会。
- ④ 按照实验步骤生成参考图形。
- ⑤ 画出所有基本初等函数的图形，并观察其特性，即单调性、周期性、对称性、变化趋势等。

⑤ 通过后面的例子体会选择项的用法。

[实验原理] 一元函数的表达式形式为 $y=f(x)$ 。它的函数图形为一条平面曲线。在平面直角坐标系下, 形如 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases} (a \leq t \leq b)$ 的方程, 成为平面曲线的参数方程。若已知平面曲线方程为 $r=f(\theta)$, 则其平面直角坐标系下的参数方程为 $\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta, \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 。

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容]

(1) 基本曲线函数图形的绘制

【例 1】 在区间 $[-5, 5]$ 内画出函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的图形, 加入可选项说明颜色, 并将两函数图形同时显示。

输入 `g1=Plot[Tan[x], {x, -5, 5}, PlotStyle->RGBColor[1, 0, 0]]` (绘制 $y=\tan x$, 加入选择项 `PlotStyle->RGBColor[1, 0, 0]` 说明红色), 如图 11.1(a) 所示。

输入 `g2=Plot[Cot[x], {x, -5, 5}, PlotStyle->RGBColor[0, 1, 0]]` (绘制 $y=\cot x$, 加入选择项 `PlotStyle->RGBColor[0, 1, 0]` 说明绿色), 如图 11.1(b) 所示。

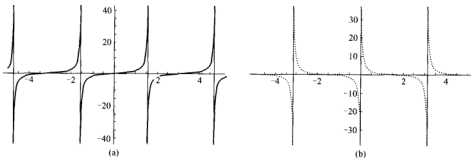


图 11.1 基本曲线函数图

输入 `Show[g1, g2]`。(同时显示两个函数图形), 如图 11.2 所示。

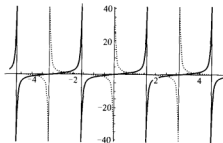


图 11.2 基本曲线函数图的叠加

(2) 参数函数的图形绘制

【例 2】 画出星形线的图形, 并给出选择项说明颜色, 在同一坐标内显示。其参数方

程分别为: $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$

输入 `g1=ParametricPlot[{Cos[t]^3, Sin[t]^3}, {t, 0, 2Pi}, PlotStyle->{RGBColor[1, 0, 0]}]` (画出参数图形, 加入选择项 `PlotStyle->{RGBColor[1, 0, 0]}` 说明红色), 如图 11.3(a) 所示。

输入 `g2=ParametricPlot[{2Cos[t]^3, 2Sin[t]^3}, {t, 0, 2Pi}, PlotStyle->{RGBColor[0, 1, 0]}]` (画出参数图形, 加入选择项 `PlotStyle->{RGBColor[0, 1, 0]}` 说明绿色), 如图 11.3(b) 所示。

输入 `g3=ParametricPlot[{3Cos[t]^3, 3Sin[t]^3}, {t, 0, 2Pi}, PlotStyle->{RGBColor[0, 0, 1]}]` (画出参数图形, 加入选择项 `PlotStyle->{RGBColor[0, 0, 1]}` 说明蓝色), 如图 11.3(c) 所示。

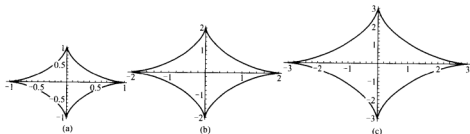


图 11.3 参数函数图

输入 `Show[g1, g2, g3]` (同时显示三个函数图形), 如图 11.4 所示。

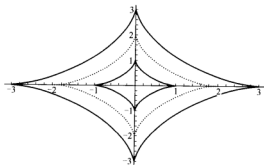


图 11.4 参数函数图的叠加

(3) 极坐标函数的图形绘制

【例 3】 画出三叶玫瑰线 $r = \cos 3t$, $r = 2\cos 3t$, $r = 3\cos 3t$ 的图形, 加入选择项说明函数图形的宽高之比和颜色并将函数图形同时显示。

输入 `r[t_] := Cos[3t]` (定义以 t 为自变量的函数)

`g1=ParametricPlot[{r[t] * Cos[t], r[t] * Sin[t]}, {t, 0, 2 * Pi}, AspectRatio->Automatic, PlotStyle->{RGBColor[0, 0, 1]}]` [绘制极坐标函数图形, 选择项定图形宽高

之比 (AspectRatio) 和颜色 (PlotStyle)。]

结果如图 11.5 (a) 所示。

输入 $r[t_] := 2 * \text{Cos}[3t]$ (定义以 t 为自变量的函数)

$g2 = \text{ParametricPlot}[\{r[t] * \text{Cos}[t], r[t] * \text{Sin}[t]\}, \{t, 0, 2 * \text{Pi}\}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 0]\}]$ [绘制极坐标函数图形, 选择项定图形宽高之比 (AspectRatio) 和颜色 (PlotStyle)。]

结果如图 11.5 (b) 所示。

输入 $r[t_] := 3 * \text{Cos}[3t]$ (定义以 t 为自变量的函数)

$g3 = \text{ParametricPlot}[\{r[t] * \text{Cos}[t], r[t] * \text{Sin}[t]\}, \{t, 0, 2 * \text{Pi}\}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[0, 1, 0]\}]$ [绘制极坐标函数图形, 选择项定图形宽高之比 (AspectRatio) 和颜色 (PlotStyle)。]

结果如图 11.5 (c) 所示。

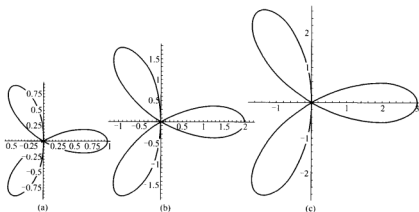


图 11.5 极坐标函数图 (三叶玫瑰线)

输入 $\text{Show}[g1, g2, g3]$ (同时显示三个极坐标函数图形, 如图 11.6 所示。)

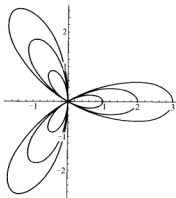


图 11.6 极坐标函数图 (三叶玫瑰线) 的叠加

通过实验,简单的一元函数数学函数图形通过一定的方法,例如重合画法,就可以形成一定的艺术效果。重合画法,就是一些简单的一元函数图形,用 Mathematic 命令,把它们在一个坐标系下生成图形。

实验 2 空间曲线图形

【实验目的和要求】

- ① 学习用 Mathematic 绘制空间曲线。
- ② 通过图形认识函数,观察函数的图形特征,建立数形结合的思想。
- ③ 通过本实验初步获得空间曲线和艺术图形的关系,谈谈体会。
- ④ 按照实验步骤生成参考图形。
- ⑤ 通过运用 Mathematic 绘图语句或作图方法,观察空间曲线图形的特点。
- ⑥ 通过后面的例子体会选择项的用法。

【实验原理】 空间曲线的参数方程的形式为
$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad t \in [tmin, tmax]$$

【实验工具】 Mathematica 5.0

【实验内容】

【例 4】 画出环面螺线
$$\begin{cases} x=(4+\sin 25t)\cos t \\ y=(4+\sin 25t)\sin t \\ z=\cos 25t \end{cases}$$
, 并体会选择项的用法。

输入 ParametricPlot3D[{(4+Sin[25t])*Cos[t],(4+Sin[25t])*Sin[t],Cos[25t]},{t,0,10000000}] [绘制空间环面螺线图形,如图 11.7 (a) 所示。]

输入 ParametricPlot3D[{(4+Sin[25t])*Cos[t],(4+Sin[25t])*Sin[t],Cos[25t]},{t,0,10000000},Axes→None] [选择项 Axes 确定是否画坐标轴,如图 11.7 (b) 所示。]

输入 ParametricPlot3D[{(4+Sin[25t])*Cos[t],(4+Sin[25t])*Sin[t],Cos[25t]},{t,0,10000000},Axes→None,Boxed→False] [选择项 Boxed 确定是否在曲线四周画立方体的盒子,如图 11.7 (c) 所示。]

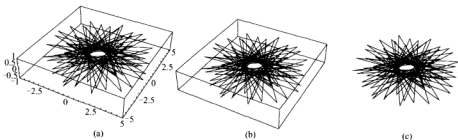


图 11.7 空间环面螺线

【例 5】绘制三叶线
$$\begin{cases} x = (2 + \cos 1.5t) \cos t \\ y = (2 + \cos 1.5t) \sin t \\ z = \sin 1.5t \end{cases}$$
，并体会选择项的用法。

输入 ParametricPlot3D[(2 + Sin[1.5t]) * Cos[t], (2 + Sin[1.5t]) * Sin[t], Cos[1.5t]], {t, 0, 100000000000}, PlotRange -> Automatic][选择项 PlotRange -> Automatic 规定图中坐标范围，如图 11.8 (a) 所示。]

输入 ParametricPlot3D[(2 + Sin[1.5t]) * Cos[t], (2 + Sin[1.5t]) * Sin[t], Cos[1.5t]], {t, 0, 100000000000}, ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2}][选择项 ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2} 确定曲线的空间观察点，如图 11.8 (b) 所示。]

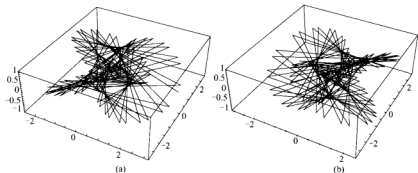


图 11.8 空间三叶线

实验 3 空间曲面图形

[实验目的和要求]

- ① 学习用 Mathematic 绘制空间曲面。
- ② 通过图形认识函数，观察函数的图形特征，建立数形结合的思想。
- ③ 通过本实验初步获得空间曲线和艺术图形的关系，谈谈体会。
- ④ 按照实验步骤生成参考图形。
- ⑤ 通过运用 Mathematic 绘图语句或作图方法，观察空间曲面图形的特点。
- ⑥ 通过后面的例子体会选择项的用法。

[实验原理] 空间曲面方程的一般方程的形式为 $z = f(x, y)$ ，参数方程的形式为

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad u \in [u_{\min}, u_{\max}], v \in [v_{\min}, v_{\max}]$$

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容]

【例 6】单叶双曲面，方程为
$$\begin{cases} x = a \sec u \sin v \\ y = b \sec u \cos v \\ z = c \tan u \end{cases} \quad u \in (0, 2\pi), v \in (-\pi/4, \pi/4), \text{ 并}$$

学会用选择项画立体的格子和表面阴影。

输入 `ParametricPlot3D[(Cosh[t]*Cos[Phi], Cosh[t]*Sin[Phi], 2t), {t, -2, 2}, {Phi, 0, 2*Phi}]` (如图 11.9 (a) 所示)

输入 `ParametricPlot3D[(Cosh[t]*Cos[Phi], Cosh[t]*Sin[Phi], 2t), {t, -2, 2}, {Phi, 0, 2*Phi}, Boxed->False]` (通过选择项 `Boxed->False` 在保留坐标轴的前提下, 将外框隐去)

输入 `ParametricPlot3D[(Cosh[t]*Cos[Phi], Cosh[t]*Sin[Phi], 2t), {t, -2, 2}, {Phi, 0, 2*Phi}, Shading->False]` (选择项 `Shading` 确定表面有光影效果或空白, 如图 11.9 (b) 所示。)

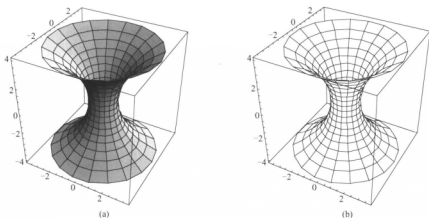


图 11.9 空间单叶双曲面

【例 7】 画出小球面与大球面的嵌套, 已知球面的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sin v \cos u \\ y = \sin v \sin u \\ z = \cos v \end{cases}$$

并学会用重合画法对空间图形进行叠加。

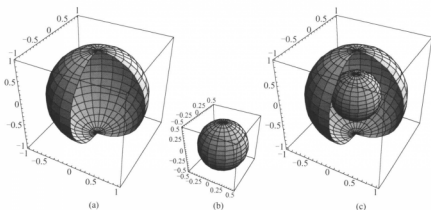


图 11.10 小球面与大球面的嵌套

输入 `g1=ParametricPlot3D[{Sin[v]*Cos[u], Sin[v]*Sin[u], Cos[v]}, {u, 0, 3Pi/2}, {v, 0, Pi}]` [结果如图 11.10 (a) 所示]

输入 `g2=ParametricPlot3D[{Sin[v]*Cos[u]/2, Sin[v]*Sin[u]/2, Cos[v]/2}, {u, 0, 2Pi}, {v, 0, Pi}]` [结果如图 11.10 (b) 所示]

输入 `Show[g1, g2]` [结果如图 11.10 (c) 所示]

空间曲线曲面也可以进行叠加重合操作, 形成具有艺术特点的立体构成图形。

实验 4 立体曲面图形

[实验目的和要求]

- ① 学习用 Mathematic 绘制空间立体曲面图。
- ② 通过图形认识函数, 观察函数的图形特征, 建立数形结合的思想。
- ③ 通过本实验初步认识空间立体曲面图和艺术图形的关系, 谈谈体会。
- ④ 按照实验步骤生成参考图形。
- ⑤ 通过运用 Mathematic 绘图语句或作图方法, 观察空间立体曲面图形的特点。
- ⑥ 通过后面的例子体会选择项的用法。

[实验原理] 空间立体曲面方程的一般方程的形式为 $z=f(x, y)$, 参数方程的形式为

$$\begin{cases} x=x(u, v) \\ y=y(u, v) \\ z=z(u, v) \end{cases} \quad u \in [u_{\min}, u_{\max}], v \in [v_{\min}, v_{\max}]$$

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容]

【例 8】 绘制空间立体曲面, 并体会选择项的用法, 参数方程的形式为

$$\begin{cases} x=\cos u \sin v \\ y=\sin u \sin v \\ z=\log[\tan(v/2)]+0.1u \end{cases} \quad u \in [0, 4\pi], v \in [0.001, 1]$$

输入 `ParametricPlot3D[{Cos[u]*Sin[v], Sin[u]*Sin[v], Cos[v]+Log[Tan[v/2]]+0.1*u}, {u, 0, 4*Pi}, {v, 0.001, 1}, PlotPoints->{64, 32}]` [画出立体图, 选择项 `PlotPoints` 为采样函数点数]

输入 `ParametricPlot3D[{Cos[u]*Sin[v], Sin[u]*Sin[v], Cos[v]+Log[Tan[v/2]]+0.1*u}, {u, 0, 4*Pi}, {v, 0.001, 1}, PlotPoints->{64, 32}, PlotRange->{0.2, 0.2}]` [选择项 `PlotRange` 设定曲线的表面的变化范围, 如图 11.11 (a) 所示。]

输入 `ParametricPlot3D[{Cos[u]*Sin[v], Sin[u]*Sin[v], Cos[v]+Log[Tan[v/2]]+0.1*u}, {u, 0, 4*Pi}, {v, 0.001, 1}, PlotPoints->{64, 32}, AxesLabel->{"sky", "earth", "person"}]` [选择项 `AxesLabel` 为坐标轴加标记, 如图 11.11 (b) 所示。]

输入 `ParametricPlot3D[{Cos[u]*Sin[v], Sin[u]*Sin[v], Cos[v]+Log[Tan[v/2]]+0.1*u}, {u, 0, 4*Pi}, {v, 0.001, 1}, PlotPoints->{64, 32}, ViewPoint->{-0.5, -3, -0.5}]` [选择项 `ViewPoint` 改变视角, 如图 11.11 (c) 所示。]

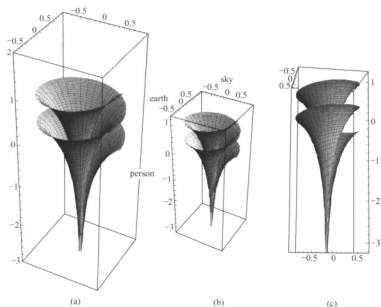


图 11.11 空间立体螺旋曲面

11.2 微积分图形实验

实验 5 常微分方程求解图形

〔实验目的和要求〕 掌握可分离变量的常微分方程的求解，并掌握二阶线性非齐次常微分方程的求解以及其取特值时显示的韵律。

〔实验原理〕 ① 求方程 $\sin(y)y' = \sin x$ 的通解，并给 $_{-C1}$ 赋特解、显示。

② 求 $y'' + y' = \sin x$ 之特解，并显示。

〔实验工具〕 Maple9.0

〔实验内容〕

【例 9】 关于方程 $\sin(y)y' = \sin x$ 的通解图形（图 11.12）。

with(student);

```
> eq:=sin(y(x))*diff(y(x),x)=sin(x);
```

```
> a:=dsolve(eq,y(x));
```

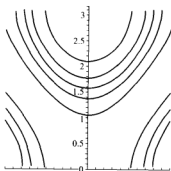
```
> map(subs,[_C1=0.5,_C1=0.8,_C1=1,_C1=1.2,_C1=1.5,_C1=2,_C1=2.5,_C1=-0.5,_C1=-0.8,_C1=-1,_C1=-1.5,_C1=-2],rhs(a));
```

```
> plot(% ,x=-2..2);
```

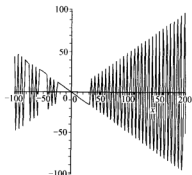
【例 10】 关于方程 $y'' + y' = \sin x$ 的特解图形（图 11.13）。

```
> eq:=diff(y(x),x$2)+y(x)=sin(x);
```

```
> a:=dsolve([eq,y(0)=0,D(y)(0)=1],y(x));
```

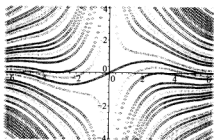
图 11.12 方程 $\sin(y)y' = \sin x$ 的通解图形

```
> plot(rhs(a), x = -100..200);
```

图 11.13 $y'' + y' = \sin x$ 的特解图形

实验 6 常微分方程通解与特解关系图形

实验 6-1 (图 11.14)

图 11.14 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ 的微分通解图形

[实验目的和要求] 了解一阶线性常微分方程的通解与特解的关系, 掌握微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ 的求解以及其特解图形与图形的显示方式。

[实验原理] 求 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ 的微分通解, 在此基础上给积分常数 $_C1$ 赋以特值, 并以点格式来显示。

[实验工具] Maple9.0

[实验内容]

```
> eq := diff(y(x), x) + y(x)/x = sin(x)/x;  
> dsolve(eq, y(x));  
> assign(%[1]);  
> with(DEtools);  
> tp := {seq(subs(_C1=i, y(x)), i = -30..30)};
```

```
> plot(tp, x = -2 * Pi .. 2 * Pi, -4 .. 4, numpoints = 150);
```

实验 6-2 (图 11.15)

【实验目的和要求】 掌握可分离变量的常微分方程的通解与特解的内在联系以及特解在图形显示时所表现出的渐变层次感。

【实验原理】 求 $\frac{dy}{dx} = -2xy$ 的微分通解, 在此基础上给积分常数 $_C1$ 赋特值。

【实验内容】

```
> eq := diff(y(x), x) = -2 * x * y(x);
> sol := dsolve(eq, y(x));
> map(subs, [_C1 = 0.5, _C1 = 1, _C1 = 1.5, _C1 = 2, _C1 = 2.5, _C1 = 3, _C1 = 3.5,
_C1 = 4, _C1 = 5, _C1 = 7, _C1 = 10, _C1 = 0.25, _C1 = -0.25, _C1 = -0.5, _C1 = -0.75],
rhs(sol));
> plot(%, x = -2 .. 2);
```

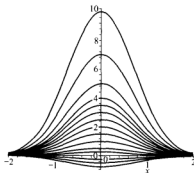


图 11.15 $\frac{dy}{dx} = -2xy$ 的微分通解图形

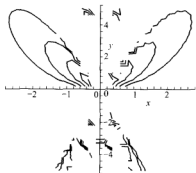


图 11.16 方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + y$ 的通解图形

实验 6-3 (图 11.16)

【实验目的和要求】 掌握齐次常微分方程的通解与特解的关系, 方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + y$ 在取一定的特解时所反映出的自然形体美。

【实验原理】 求方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + y$ 的通解, 给积分常数 $_C1$ 赋值并显示。

【实验内容】

```
> eq := diff(y(x), x) = y(x)/x + tan(y(x)/x);
> odeadvisor(eq);
> dsolve(eq, y(x));
> sol := dsolve(eq, y(x), implicit);
> tp := {seq(subs(_C1 = 0.5 * i, sol), i = -2 .. 2)};
> implicitplot(tp, x = -3 .. 3, y = -5 .. 5);
```


实验7 全微分方程求解图形

[实验目的和要求] 掌握全微分方程的求解, C 在取不同值时的曲线族的显示 (图 11.17)。

[实验原理] 求方程 $\frac{dy}{dx} = (\sec^2 x - 2xy)/(x^2 + 2y)$ 的通解, 并赋 C 特值、显示。

[实验工具] Maple9.0

[实验内容]

```
> eq:=diff(y(x),x)=(sec(x)^2-2*x*y(x))/(x^2+2*y(x));
> M:=sec(x)^2-2*x*y; N:=-x^2-2*y;
> diff(M,y)=diff(N,x);
> F:=int(M,x)+k(y);
> diff(F,y)=N;
> solve({%},diff(k(y),y));
> k(y)=int(-2*y,y);
> subs(k(y)=-y^2,F=C);
> sol:=convert(% ,tan);
> implicitdiff(sol,y,x);
> eqs:=map(subs,{C=0,C=3,C=4,C=0.5,C=0.25,C=0.15,C=1,C=2},sol);
> plots[implicitplot](eqs,x=0..3,y=-3..3,grid=[60,60]);
```

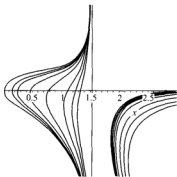


图 11.17 $\frac{dy}{dx} = (\sec^2 x - 2xy)/(x^2 + 2y)$ 的通解图形

实验8 积分定义图形

[实验目的和要求] 通过直观的图形来了解积分的定义 (图 11.18)。

[实验原理] 求 $x + \sin x \cos x + \frac{1}{x + \exp(x)}$ 的积分近似值。

[实验工具] Maple9.0

[实验内容]

```
> f:=x-(x+sin(x)*cos(x))+1/(x+exp(x));
```

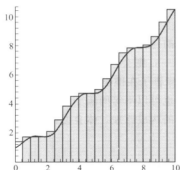


图 11.18 积分定义图形

```
> rightbox(f(x), x=0..10, 20);
```

实验 9 积分参数变化图形

〔实验目的和要求〕 通过直观的图形来掌握积分的定义以及在函数参数变化时所引起的图形变化。

〔实验原理〕 求 $\sin(4x)^3 \cos x + \cos(x^2)$ 的积分近似值，并用图形来显示。

〔实验工具〕 Maple 9.0

〔实验内容〕

```
> f:=sin(4*x)^3*cos(x)+cos(x^2);
```

```
> rightbox(f(x), x=0..8, 100);
```

结果如图 11.19 所示。

```
> rightbox(f(x), x=0..20, 200);
```

结果如图 11.20 所示。

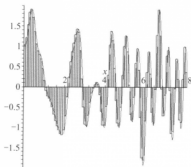


图 11.19 积分参数变化图形 (一)

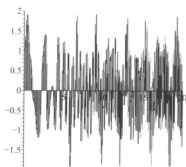


图 11.20 积分参数变化图形 (二)

11.3 级数图形实验

通过对级数展开图形生成实验，掌握节奏在设计中的应用规律。通过数理性的变化产生新的设计效果，使设计带有强烈规律性的韵律美感。节奏可以重复形成韵律也可以进行

变化形成韵律,变化的节奏形成的韵律更具活力,可以在一定程度上减少重复的呆板,变化节奏在构成韵律的表现方法上主要有:①一次元的韵律表现。基本形式是在上下左右作单一方向的反复即为一次元的韵律。在一次元的韵律中,如果基本形的间隔相同,则韵律变化就少;如果基本形间隔不一,则会产生复杂的韵律。②二次元的韵律表现。即在 x 轴、 y 轴两个方向的变化,就像棋子在围棋盘上作上下左右的反复一样,即为二次元的韵律。基本形可以等间隔变化,也可以不等间隔变化。这些原理均来源于数理知识,通过具体实验来掌握级数和韵律节奏的构成原理,体会设计数学软件的特点,并应用到设计实务当中。

实验 10 幂级数展开图形

[实验目的和要求] 了解幂级数的展开及其表现出的节奏美(图 11.21)。

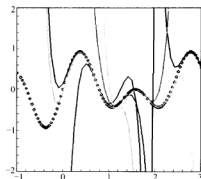


图 11.21 幂级数展开图形

[实验原理] 求 $\sin(4x)\cos x$ 的级数,并求在 x 取不同的值时, x 处的展开幂级数,显示出来。

[实验工具] Maple9.0

[实验内容]

```
> f:=sin(4*x)*cos(x);
> t1:=series(f,x=0);
> t2:=series(f,x=1);a:=convert(%,polynom);
> t3:=series(f,x=2);c:=convert(%,polynom);
> t4:=series(f,x=3);b:=convert(%,polynom);
> t5:=series(f,x=4);e:=convert(%,polynom);
> t6:=series(f,x=5);g:=convert(%,polynom);
> t7:=series(f,x=6);h:=convert(%,polynom);
> t8:=series(f,x=7);j:=convert(%,polynom);
> t9:=series(f,x=0.5);k:=convert(%,polynom);
> t10:=series(f,x=0.75);l:=convert(%,polynom);
> t11:=series(f,x=1.5);z:=convert(%,polynom);
> plot({f,a,a,b,b,c,e,e,g,g,h,j,k,l,z},x=-1..3,y=-2..2);
```

实验 11 傅里叶级数展开图形一

[实验目的和要求] 熟练掌握傅里叶级数展开原理, 熟悉傅里叶函数模块的建立过程, 依据函数展开图形体会节奏的表现形式。

[实验原理] 傅里叶级数的展开原理。

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容]

(1) fseries [f, T, j] 模块的生成

在 Mathematica 中, 没有傅里叶的直接展开命令, 首先通过编程定义傅里叶函数模块, 定义后就可在使用时调用此模块。

fseries=. (把以前定义过的 fseries 函数除掉, 也可以用 Remove[fseries]命令来完成)

fseries[f_, T_, j_] := Module[{a, b, i, t, ss, g1, g2}, (定义模块 fseries[f, T, j])

a[0] = Integrate[f, {x, -T, T}]/T;

ss = a[0]/2;

Do[t = i*Pi/T;

a[i_] = Integrate[f*Cos[t*x], {x, -T, T}]/T;

b[i_] = Integrate[f*Sin[t*x], {x, -T, T}]/T;

ss = ss + a[i]Cos[t*x] + b[i]Sin[t*x], {i, 1, j});

Print[ss]

Plot[Evaluate[ss], {x, -T, T}]

(2) fseries [f, T, j] 模块的调用

现通过一个例子来说明模块的调用方法。设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $f(x) = x$, 将 $f(x)$ 分解为间谐振动的叠加。过程如下。

在程序中先输入定义模块 fseries [f, T, j] 的命令, 再输入以下命令。

f = x;

T = Pi;

n = 5;

Do[fseries[f, T, j], {j, 1, n}]

Plot[f, {x, -T, T}]

就可以得到 $f(x)$ 1~5 阶的傅里叶展开式。 $f(x)$ 及其 1~5 阶傅里叶展开式的图形见图 11.22。

通过对傅里叶函数的定义和程序模块的调用, 加深对傅里叶函数的理解 and 应用, 傅里叶函数模块的建立体现了数学软件快捷的可重复操作的优越性。以下是傅里叶展开的两个参考图例。

FilledPlot[{ $\frac{4\sin[x]}{\pi} + \frac{4\sin[3x]}{3\pi} + \frac{4\sin[5x]}{5\pi} + \frac{4\sin[7x]}{7\pi} + \frac{4\sin[9x]}{9\pi} - \frac{2\sin[x]}{\pi} - \frac{\sin[3x]}{3\pi} - \frac{\sin[5x]}{5\pi} - \frac{\sin[7x]}{7\pi} - \frac{\sin[9x]}{9\pi}$ }, {x, -2Pi, 2Pi}, Fills -> {RGBColor[0.93, 0.97, 0.58]}, Background -> RGBColor[0.180, 0.103, 0.067], PlotStyle -> {RGBColor[1, 1, 1]},

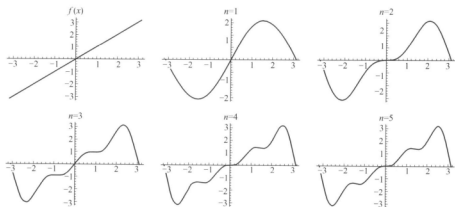


图 11.22 1~5 阶傅里叶展开式的图形

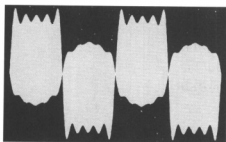


图 11.23 傅里叶展开图例 (一)

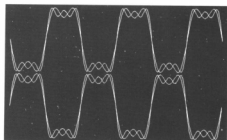


图 11.24 傅里叶展开图例 (二)

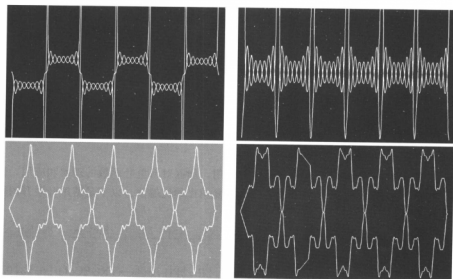


图 11.25 傅里叶展开图例 (三)

Axes→False](图 11.23)

Plot[$\left\{\frac{4\sin[x]}{\pi} + \frac{4\sin[3x]}{3\pi}, \frac{4\sin[x]}{\pi} + \frac{4\sin[3x]}{3\pi} + \frac{4\sin[5x]}{5\pi}, -\frac{4\sin[x]}{\pi} - \frac{4\sin[3x]}{3\pi} - 2.5, -\frac{4\sin[x]}{\pi} - \frac{4\sin[3x]}{3\pi} - \frac{4\sin[5x]}{5\pi} - 2.5\right\}, \{x, -3\pi, 3\pi\}, \text{Background} \rightarrow \text{RGBColor}[0.220, 0.151, 0.161], \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 1, 1]\}, \text{Axes} \rightarrow \text{False}]$ (图 11.24)

另有一些傅里叶展开图例如图 11.25 所示。

实验 12 傅里叶级数展开图形二

[实验目的和要求] 在掌握傅里叶函数的基础上, 利用傅里叶函数图形进行节奏和韵律构图, 并加深对重复节奏构成的理解。

[实验原理] 傅里叶级数的重复性一元变化。

[实验工具] Mathematica 5.0, Maple9.0

[实验内容]

(1) 基本单元的生成

输入的参数为傅里叶函数展开的项, 对这些项的修改可以改变图形形状。以下实例均来自实验 11 的傅里叶展开式和变体, 也可尝试其他傅里叶函数项, 不断探索新的美的图形。

第一步, 把实验 11 的 n 改为 10, 即将傅里叶函数展开 10 项, 在定义了函数 fseries [f, T, j] 的基础上输入下面的代码。

```
f=x;
T=Pi;
n=10;
Do[fseries[f,T,j],[j,1,n]]
Plot[f,{x,-T,T}]
```

就可得到 $f(x)$ 1~10 阶的傅里叶展开式。

第二步, 用 FilledPlot 命令生成图形单元, 代码如下。

```
s=FilledPlot[{2Sin[x]-Sin[2x],
-2Sin[x]+Sin[2x],
2Sin[x]-Sin[2x]+2/3Sin[3x],
-2Sin[x]+Sin[2x]-2/3Sin[3x],
2Sin[x]-Sin[2x]+2/3Sin[3x]-1/2Sin[4x],
-2Sin[x]+Sin[2x]-2/3Sin[3x]+1/2Sin[4x],
2Sin[x]-Sin[2x]+2/3Sin[3x]-1/2Sin[4x]+2/5Sin[5x],
-2Sin[x]+Sin[2x]-2/3Sin[3x]+1/2Sin[4x]-2/5Sin[5x],
2Sin[x]-Sin[2x]+2/3Sin[3x]+1/2Sin[4x]-2/5Sin[5x]+1/3Sin[6x],
2Sin[x]-Sin[2x]+2/3Sin[3x]-1/2Sin[4x]+2/5Sin[5x]-1/3Sin[6x]+2/7Sin[7x]},
```

$-2\sin[x] + \sin[2x] - 2/3\sin[3x] + 1/2\sin[4x] - 2/5\sin[5x] + 1/3\sin[6x] - 2/7\sin[7x]$,

$2\sin[x] - \sin[2x] + 2/3\sin[3x] - 1/2\sin[4x] + 2/5\sin[5x] - 1/3\sin[6x] + 2/7\sin[7x] - 1/4\sin[8x]$,

$-2\sin[x] + \sin[2x] - 2/3\sin[3x] + 1/2\sin[4x] - 2/5\sin[5x] + 1/3\sin[6x] - 2/7\sin[7x] + 1/4\sin[8x]$,

$2\sin[x] - \sin[2x] + 2/3\sin[3x] - 1/2\sin[4x] + 2/5\sin[5x] - 1/3\sin[6x] + 2/7\sin[7x] - 1/4\sin[8x] + 2/9\sin[9x]$,

$-2\sin[x] + \sin[2x] - 2/3\sin[3x] + 1/2\sin[4x] - 2/5\sin[5x] + 1/3\sin[6x] - 2/7\sin[7x] + 1/4\sin[8x] - 2/9\sin[9x]$,

$2\sin[x] - \sin[2x] + 2/3\sin[3x] - 1/2\sin[4x] + 2/5\sin[5x] - 1/3\sin[6x] + 2/7\sin[7x] - 1/4\sin[8x] + 2/9\sin[9x] - 1/5\sin[10x]$,

$-2\sin[x] + \sin[2x] - 2/3\sin[3x] + 1/2\sin[4x] - 2/5\sin[5x] + 1/3\sin[6x] - 2/7\sin[7x] + 1/4\sin[8x] - 2/9\sin[9x] + 1/5\sin[10x]$,

$\{x, 0, 2\pi\}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}, \text{Axes} \rightarrow \text{False}$

结果如图 11.26 所示。

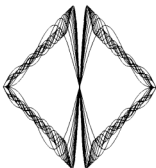


图 11.26 傅里叶级数的节奏图

(2) 重复单元的生成

改变命令 x 的取值范围如下：

$\{x, -4\pi, 4\pi\}$ ，则可以生成重复图案（图 11.27）。

由此得到变化的单元以及重复的有节奏的构图。另外，函数命令可以通过在属性里增

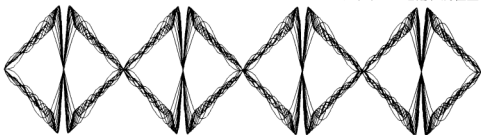


图 11.27 傅里叶级数的节奏重复

加 “Background→RGBColor[0.93,0.79,0.58]” “PlotStyle→{RGBColor[0.069,0.085,0.106]” 分别设置图片背景色和图形色。图 11.28 所示为通过不断旋转变化的螺旋线切割一个十二边形得到，富有节奏和韵律美。

另有如下傅里叶级数展开实例（图 11.29）可供参考。

Needs["GraphicsGraphics"]

Clear[p1,p2]

p1=PolarPlot[Evaluate[Table[1-aCos[t],{a,0.1,5,0.1}]],{t,0,2Pi},Background→RGBColor[0.220,0.151,0.161],PlotStyle→{RGBColor[1,1,1]},Axes→False]

p2=PolarPlot[Evaluate[Table[1+aCos[t],{a,0.1,5,0.1}]],{t,0,2Pi},Background→RGBColor[0.220,0.151,0.161],PlotStyle→{RGBColor[1,1,1]},Axes→False]

Show[p1,p2]

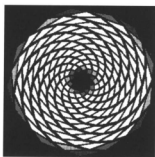


图 11.28 螺旋线

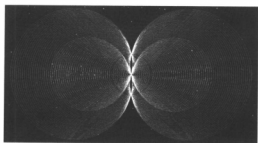


图 11.29 卡通眼

实验 13 傅里叶级数展开图形扩展

〔实验目的和要求〕 通过合理运用傅里叶函数图形进行设计图案制作，结合相关软件的应用，把函数蕴涵的数理节奏美扩展丰富。

〔实验原理〕 傅里叶级数的形的构成。

〔实验工具〕 Mathematica 5.0, CorelDRAW 9.0

〔实验内容〕

(1) 基本形的生成

在 Mathematica 中输入以下命令语句。

Plot[4Sin[x]+4/3Sin[3x],{x,-Pi,Pi},Axes→False]

结果如图 11.30 所示。



图 11.30 傅里叶基本形

傅里叶基本形起伏而有动感。应用相关软件对其旋转叠加、变形产生更为丰富的造型图案,以达到在设计构成中合理应用这些简单优美的设计因子的目的。

(2) 形的构成变化

在平面设计软件 CorelDRAW 中,对傅里叶基本形进行再加工(图 11.31)。

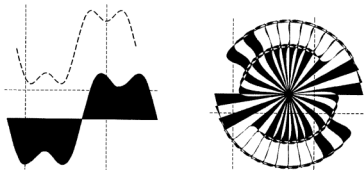


图 11.31 傅里叶图形扩展

傅里叶级数的图形本身就是很有节奏和美感的曲线,在设计构成中传统的构成的形虽然也是几何图形,但有很大的偶然性,数学函数的图形都有一定的数理关系,螺旋曲线被称为生命的曲线是不无道理的。

另有以下傅里叶图形扩展实例可供参考(图 11.32)。

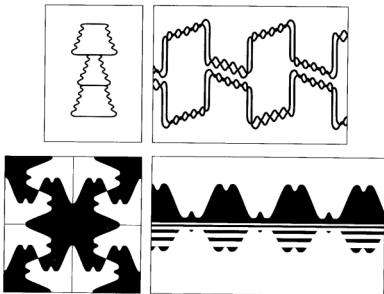


图 11.32 傅里叶图形扩展实例

11.4 小结

① 函数、微积分和级数,尤其是傅里叶级数蕴涵了多种艺术美的形式,均衡、变化、

统一、比例、韵律、节奏等美学法则均在相关设计中得到直观体现。

② 函数图形实验包括了一元函数图形、空间函数图形、空间曲面图形以及立体曲面图形等实验。

③ 微积分图形实验包括了常微分方程求解图形、常微分方程通解与特解关系图形、全微分方程求解图形、积分定义图形和积分参数变化图形实验。

④ 级数图形实验包括了幂级数展开图形、傅里叶级数展开图形以及傅里叶级数展开图形扩展实验。

⑤ 高等数学图案中具有丰富的美的艺术表现，数学原始图形揭示了设计艺术形式规则中的数理内涵，也为设计艺术增添了理性化的表达方式。

第12章

设计构成实验



- 平面构成实验
- 立体构成实验
- 色彩构成实验
- 小结

构成是一种造型活动，是将造型的各种元素，按照一定的原则组织成具有强烈视觉效果和力学观念的美的形式；其内容侧重于对纯形态、纯造型要素进行研究，因此，应用了大量数理概念和逻辑概念，被理解为美术设计中的数学，这是构成本身的特点和构成教学中的重点。设计构成是研究构成在设计中的运用和应用美学原则，将构成的原理和方法运用到设计中的学科。

设计构成实验包括平面构成（平面构成三要素以及平面重复，平面渐变，平面发射和平面特异构成）实验、立体构成（点元素、线元素、面元素和块元素构成）实验和色彩构成（色彩系统、色相对比、明度对比、纯度对比、色彩表达、色彩心理和色彩应用）实验，设计构成实验通过不同的数理性质生成不同类型的几何图形，这些图形又形成不同的构成形式，反映出设计构成中的各种形式法则，通过设计构成实验，一方面体会构成的数理性、逻辑性和高度抽象符号及其简洁的几何形态的特色，体验由这些特点所表现出来的秩序、节奏和数理性、规则性的美感；另一方面通过自己动手把数理知识应用到设计中去，深刻认识数学在设计中的作用，增强数学学习的审美感和趣味，并且训练数学思维和设计方法，增强应用数学工具解决实际设计问题的能力。

12.1 平面构成实验

平面构成是现代设计基础的一个重要组成部分，指将既有形态（包括具象形态和抽象形态——点、线、面、体）在二维的平面内，按照一定的秩序和法则进行分解、组合，从而构成理想形态的组合形式。平面构成是一种理性的艺术活动，它在强调形态之间的比例、平衡、对比、节奏、律动、推移等的同时，又要讲究图形给人的视觉引导作用。平面构成在于探求二维空间世界的视觉文法，形象的建立，骨格的组织，各种元素的构成规律与规律的突破，造成既严谨又有无穷律动变化的构图形式。下面通过具体的设计实验来掌握平面构成原理与函数在设计构成中的应用，体会数理化了的计算机辅助设计特点，并应用到设计实务中。

实验1 平面构成三要素

【实验目的和要求】 理解数学元素与构成元素之间的内在关系，应用函数的几何性质进行点、线、面的生成与形式扩展，为下一步平面构成的展开奠定基础。

【实验原理】 函数的几何性质。

【实验工具】 Mathematica 5.0

【实验内容】

(1) 平面构成中的点

平面构成中的点通过 Graphics 命令 (Graphics [primitives, options]) 实现，Graphics 图形通过 Show 语句显示，设 $f(x)$ 是用 Graphics 命令生成的一个函数，在程序中输入以下命令。

```
f[x_]=Graphics[{PointSize[d],Point[{0,0}],PlotRange->All}
```

```
Show[f[x]]
```

可得到点的形象。由以下命令生成图 12.1。

```
pt=Short[Table[{Hue[Random[]],PointSize[Random[Real,{0.01,0.1}]],Point[{Random[],Random[]}]}],{330}]]
```

```
{{Hue[0.580798],PointSize[0.0598566],Point[{0.857116,0.163666}]},<<328>>,<<1>>}}
```

```
Show[Graphics[pt,PlotRange->All]]
```

(2) 平面构成中的线

平面构成中的线通过 Plot 命令 (Plot[f, {x, xmin, xmax}]) 实现，除了 Plot 命令外，ListPlot, ParametricPlot 也可生成线。其中，ListPlot 命令根据一系列的函数值生成曲线；ParametricPlot 命令由向量值函数形成参数曲线。它们的命令形式分别为 ListPlot[{ y_1, y_2, \dots }]；ParametricPlot[{ f_x, f_y }, {t, tmin, tmax}]。

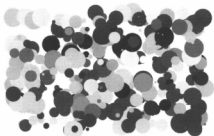


图 12.1 平面构成中的点

以四叶玫瑰线为例，详细说明线的图形生成，并通过改变函数中的某些参数使四叶玫瑰线产生演化，形成函数之花系列。四叶玫瑰线由以下命令得到：

```
ParametricPlot[{Sin[2 $\theta$ ]Cos[ $\theta$ ],Sin[2 $\theta$ ]Sin[ $\theta$ ]},{ $\theta$ ,0,2Pi}]
```

以上是以参数方程的形式用 ParametricPlot 命令生成的。此外，还可以极坐标形式用 PolarPlot 命令生成，这时需要键入以下命令调用软件包：<<Graphics`Graphics'。

通过改变上述函数的自变量系数使四叶玫瑰线产生变化，生成函数之花系列。以下图形即是通过将上述函数表达式中的 2θ 改变为 $3\theta, 4\theta, 5\theta, 6\theta$ 而形成的图形 (图 12.2)。

根据需要选择函数参数，产生不同的视觉效果；还可将两条以上的曲线结合在一起形成更具美感的图形，同样用 Show 命令显示图形。

(3) 平面构成中的面

面是转折体的一个表面，点的扩大、集合、排列以及线的移动轨迹均可形成面。运用 Graphics 命令可以生成不同形式的面 (图 12.3)。

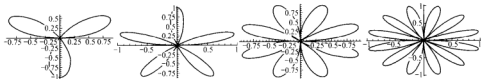


图 12.2 平面构成中的线



(a)



(b)

图 12.3 平面构成中的面

简单地实现一个菱形的命令如下。

```
vertices = {{0, -1}, {1, 0}, {0, 1}, {-1, 0}, {0, -1}};
p = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Polygon[vertices]}];
Show[p];
```

其中, 图 12.3 (a) 的函数命令如下。

```
p1 = Table[Rectangle[{x, 0}, {x + 0.08, Sin[x]}], {x, 0, 2Pi, 0.15}];
Show[Graphics[p], Axes -> False]
```

点、线、面的函数生成成为后续平面构成打下基础, 初步体验了数学产生的美。

实验 2 平面重复构成

[实验目的和要求] 利用函数生成的点、线、面图形进行重复构图, 通过训练体会重复构成累加所产生的韵律与平衡等特点。

[实验原理] 函数生成的构成三要素的重复性一元变化。

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容]

(1) 单一要素重复

引入具体的函数类型和函数表达式表现点的重复。以 Table 函数为例, 输入以下命令



图 12.4 点的重复



图 12.5 线的重复

得到点的重复构图 (图 12.4)。

```
Table[Point[{n^2, Prime[n]}], {n, 8}];
{Point[{1, 2}], Point[{4, 3}], Point[{9, 5}]}
```

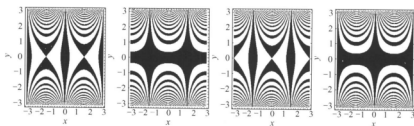


图 12.6 面的重复

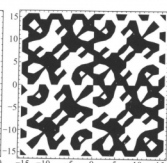
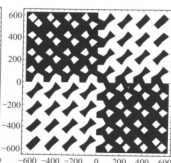
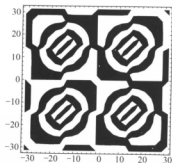
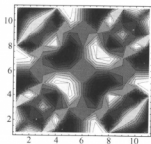
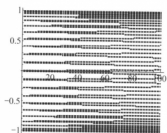
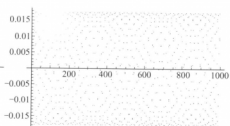
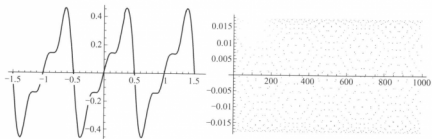


图 12.7 重复构成综合实例

```
Point[{16,7}],Point[{25,11}],Point[{36,13}],Point[{49,15}],Point[{64,17}];
```

```
Show[Graphics[{PointSize[0.1],%}],PlotRange->All];
```

应用基本函数命令 Plot 获得线的重复,通过扩大自变量的范围来表现重复构成,输入以下命令可生成图 12.5。

```
Plot[{Sin[x]},{x,0,8Pi}]
```

应用 GraphicsArray 命令可生成重复的面形。执行下列命令可得到如图 12.6 的重复图形。

```
Show[GraphicsArray[Block[{ $DisplayFunction=Identity},
Table[Flatten[Outer[DensityPlot[
RealDigits[#2[#1[x+I y]],2,2,-n][[1,1]],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi},
PlotPoints->250,Mesh->False,ColorFunction->GrayLevel,
Compiled->False,
FrameLabel->TraditionalForm/@{x,y}&.,{Sin,Cos},{Re,Im}]],
{n,1}]]],ImageSize->500,GraphicsSpacing->0]//Timing
```

(2) 综合要素重复

通过点、线、面要素的综合应用获得更加复杂丰富的重复构成图形(图 12.7)。

综合要素重复实例的部分源代码如下。

```
ContourPlot[Sin[-x y],{x,-10 Pi,10 Pi},{y,-10Pi,10Pi},Contours->1]
```

```
ContourPlot[Sin[-x y],{x,-200 Pi,200 Pi},{y,-200Pi,200Pi},Contours->1]
```

```
ContourPlot[Sin[-x y],{x,-5Pi,5 Pi},{y,-5Pi,5Pi},Contours->1]
```

为凸现重复图形的视觉效果,可在函数选项项中增设图形样式,例如 Background、ColorFunction 等,分别设置图形背景的色彩和图形的色彩表现,使图形更具美感。

实验 3 平面渐变构成

【实验目的和要求】 渐变构成富含节奏和韵律,将基本元素按照一定规律产生连续变化,形成渐变形态,应用函数性质生成具有节奏感和美感的渐变图形。

【实验原理】 由函数构成基本形按渐变规律产生连续变化。

【实验工具】 Mathematica 5.0、CorelDraw

【实验内容】

(1) 大小渐变

基本形由大到小或由小到大的渐次变化,会产生远近深度及空间感。通过输入以下命令,得到点的大小渐变(图 12.8)。

```
Show[Graphics[{Table[{AbsolutePointSize[d],Point[{d/10,d/10}]],{d,15}]}]]];
```

(2) 色彩渐变

色相、明度、纯度都可产生渐变效果,获得有层次的美感。以明度渐变为例,输入以下函数命令得到图 12.9。

```
<<Graphics`ArgColors`
```

```
un[k_]:=Exp[2 Pi I k/10]
```



图 12.8 大小渐变



图 12.9 明度渐变

```
Show[Graphics[Table[{ArgShade[un[j]], Disk[{Re[un[j]], Im[un[j]]}, 0.2]}, {j, 10}], AspectRatio -> Automatic]]
```

(3) 形状渐变

形状渐变是基本形有规律、逐渐的增减变化，可由完整渐变到残缺，也可由简单渐变到复杂，以此形成发展型的渐变特征。例如，执行下列命令得到从菱形到正方形再到菱形的渐变图形（图 12.10）。

```
vertices = {{0, -1}, {1, 0}, {0, 1}, {-1, 0}, {0, -1}}
p1 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Polygon[vertices]}, AspectRatio -> 0.5]
p2 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Polygon[vertices]}, AspectRatio -> 0.8]
p3 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Polygon[vertices]}, AspectRatio -> 1]
p4 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Polygon[vertices]}, AspectRatio -> 1.2]
p5 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Polygon[vertices]}, AspectRatio -> 2]
Show[GraphicsArray[{p1, p2, p3, p4, p5}], GraphicsSpacing -> 0.05]]
```



图 12.10 形状渐变

(4) 骨格渐变

骨格渐变是指骨格有规律的变化，使基本形在形状、大小、方向上产生变化。通过渐

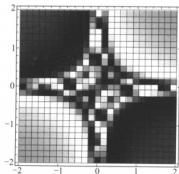


图 12.11 骨格渐变

变骨格排列,产生特殊的视觉效果。输入下列命令可生成一个简单的骨格渐变构成图形(图 12.11)。

$\text{DensityPlot}\left[\text{Sin}\left[\frac{1}{xy}\right], (x, -2, 2), (y, -2, 2), \text{PlotPoints} \rightarrow 25\right];$

渐变构成在视觉设计中能产生强烈的透视感和空间感。通过改变函数参数来实现具有不同规律的渐变构成图形。另外,通过在 Mathematica 中生成基本形,然后在平面软件如 CorelDRAW 中对基本形做适当调整和修改可形成更为丰富的渐变效果,如图 12.12 所示的鱼骨渐变。



图 12.12 鱼骨渐变

实验 4 平面发射构成

[实验目的和要求] 将基本形按照一定的发射规律产生连续变化,形成富含韵律美的图形。通过合理运用函数性质进行发射构图,把函数蕴涵的数理美表现到发射构成中。

[实验原理] 把由函数生成的基本形按发射的骨格线做有规律的变化。

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容] 发射形决定于发射的骨格,然后将基本要素应用于骨格上。通过中心集中或中心散开,产生爆炸性的视觉感受。输入以下命令得到一个发射的基本骨格形式(图 12.13)。

$\text{ShowGraph}[\text{GraphSum}[\text{Star}[10], \text{Star}[10]]]$



图 12.13 发射的基本骨格形式

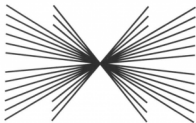


图 12.14 离心式发射图形

发射构成分为中心点发射,同心式发射等。中心点发射又分为离心式发射和向心式发射。

离心式发射(图 12.14) 其基本形的方向为向外扩散,具有扩张感。命令语句如下。

$\text{Show}[\text{Graphics}[\{\text{Table}[\{\text{Thickness}[.01], \text{Line}[\{\{0,0\}, \{1,d\}\}], \text{Line}[\{\{0,0\}, \{1,-d\}\}], \text{Line}[\{\{0,0\}, \{-1,d\}\}], \text{Line}[\{\{0,0\}, \{-1,-d\}\}], \text{Line}[\{\{0,0\}, \{0.5,d\}\}], \text{Line}[\{\{0,0\}, \{0.5,-d\}\}], \text{Line}[\{\{0,0\}, \{-0.5,d\}\}], \text{Line}[\{\{0,0\}, \{-0.5,-d\}\}], \{d, 6\}]\}]]];$

向心式发射(图 12.15) 其中心由外向内集中,具有内敛感。命令语句如下。

```
Show[Graphics[Table[Arrow[{0,0},x{Sin[x],Cos[x]},HeadScaling->Absolute],
{x,0,2 Pi,.3}]],PlotRange->All]
```

同心式发射（图 12.16）以一个焦点为中心，层层环绕发射，产生膨胀感。命令语句如下。

```
ListContourPlot[Table[x^2+y^2+Random[Real,{ -0.2,0.2}],{x,-2,2,0.1},
{y,-2,2,0.1}]];
```

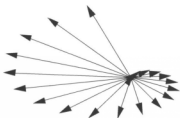


图 12.15 向心式发射图形

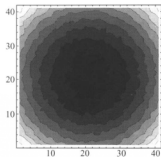


图 12.16 同心式发射图形

发射构成设计在人的视域中形成强烈的视线焦点，增强人们的注意力，给人以强烈的震撼力。通过改变函数参数来尝试具有不同规律的发射构成图形，将图 12.17 作为参考，以此生成更富有变化的发射构成图形。

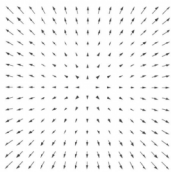
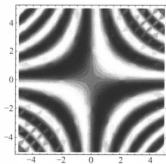


图 12.17 发射图形实例

实验 5 平面特异构成

〔实验目的和要求〕 特异构成将构成基本形通过小部分不规则地对比，形成新的秩序。运用函数性质掌握特异构成设计的方法。

〔实验原理〕 函数生成基本形，局部形态突破骨格规律而形成变化。

〔实验工具〕 Mathematica 5.0

〔实验内容〕 特异建立在重复的基础上，其中部分形态突破了骨格和形态规律。这种整体的有规律的形态群中，有局部突破和变化的构成使人在视觉上受到刺激，打破单调，得到生动活泼的视觉效果。特异的形式包括大小特异、色彩特异、方向特异和肌理特异

等。这些形式可单独使用，也可综合使用，并适用于各种骨格形式。以下将对各种形式做具体说明。

大小特异是在相同的基本形的构成中，在大小上做特异对比，这样能强化基本形的形象。图 12.18 是一个简单的大小特异的实例，其命令如下。

```
Show[GraphicsArray[{ContourPlot[Cos[xy/10]+Sin[x],{x,-10,10},{y,-10,10},PlotPoints->30,FrameTicks->None,ColorFunction->GrayLevel,DisplayFunction->Identity]}]]
```

方向特异是少数基本形在方向上有所变化，形成律动。输入以下命令可得到方向的特异构成图形，如图 12.19。

```
<<GraphicsPlotFieldPlotPolyaField[(x+I y)^4-1,{x,0,3},{y,0,3}]
```

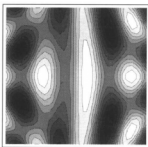


图 12.18 大小特异

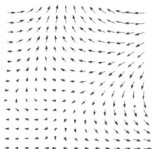


图 12.19 方向特异

肌理特异是在相同的肌理质感中，造成不同的肌理变化，能使形象更丰富，质感更加强烈。图 12.20 展示的图形是肌理的特异构成，执行的命令如下。

```
MandelbrotFunction=Compile[{{c,_Complex}},-Length[FixedPointList[#^2+c&.,c,50,SameTest->(Abs[#2]>2.0&.)]]]
```

```
DensityPlot[MandelbrotFunction[Sin[x]+Cos[y]I],{x,-1.8,0.3},{y,-0.8,0.6},AspectRatio->Automatic,Frame->False,PlotPoints->160]
```

通过多个函数的数理关系得到不同类型的特异构成，改变函数参数实现具有不同特点

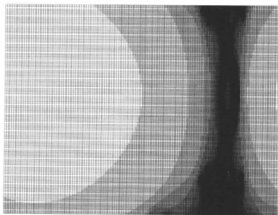


图 12.20 肌理特异

的特异构成图形时,其中应注意特异因素不能过多,防止出现杂乱无章的现象。

12.2 立体构成实验

立体空间可用一组三维数字来表示。空间美观与否,给人的心理感受如何,在设计实验中均取决于数学语句的合理应用。无论是自然环境还是人造环境,人们总可以对其进行抽象、概括,从而找出基本单元体,用这些基本单元体来再现、模拟、创造设计空间。本节从基本单元体入手,在此基础上应用重复、渐变、特异等美学法则来表达立体空间的美。通过各类元素的立体构成分类实验从中感悟、体会立体构成的数理美。

实验6 基本形与自然形

【实验目的和要求】 掌握基本数学原理与立体构成之间的内在联系,掌握立体构成中的基本形体与自然形体的特征。

【实验原理】 应用几何体生成命令及动画变形命令生成基本立体。

【实验工具】 Maple9.5

【实验内容】

(1) 基本形

基本形包括一些简单的几何体,如:正四面体、正六面体、正十面体、正二十面体等。其中,平面几何体简练、大方、庄重。可直接应用于建筑设计、展示设计的基本构架。基本形在空间的重复、组合或渐变会产生简洁、明快的视觉效果。

基本形的生成,首先要调用程序包 with (geom3d)。输入如下命令可得到一些基本几何体(图 12.21)。其中,point (o, 0, 0, 0) 定义多面体的中心位置, x 表示几何体的大小(此处 x 取值为 3)。

```
> with(geom3d);
> tetrahedron(gon1,point(o,0,0,0),3);(正四面体)
> cube(gon2,point(o,0,0,0),3);(正六面体)
> dodecahedron(gon3,point(o,0,0,0),3);(正十二面体)
> icosahedron(gon4,point(o,0,0,0),3);(正二十面体)
> draw({gon1,gon2,gon3,gon4});
```

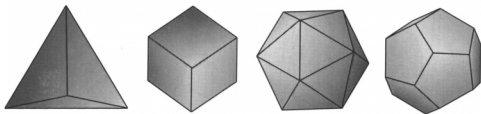


图 12.21 基本几何平面体

基本几何曲面体(图 12.22)的形成则由某一几何曲线或是某一直线绕某一固定的回转轴旋转而成。几何曲面体严肃而不失变化,是家具器皿设计的理想造型。如,餐具、茶

具、酒具等的设计。生成圆球、圆柱、圆环的命令语句如下。

```
> with(plottools):
> c:=sphere([1,1,1],3,3);
> plots[display](c,scaling=constrained,style=patch,axes=boxed);
> c:=cylinder([1,1,1],1,3);
> plots[display](c,scaling=constrained);
> c:=torus([1,1,1],1,5);
> plots[display](c,scaling=constrained,style=patch,axes=boxed);
```

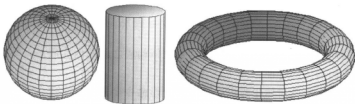


图 12.22 基本几何曲面体

在绘制圆球、圆柱、圆环时调用了 `plottools` 程序包, `scaling` 参数按严格比例控制图形显示; `style` 参数控制图形的显示方式, 可以以点、网格、等高线等格式来显示; `axes` 参数控制图形的显示坐标。

(2) 自然形

这里主要指在客观环境中, 自然形成的一些偶然形体。自然形体 (图 12.23) 在仿生设计以及产品设计等领域有着广泛的应用前景。对自然形体的观摩可成为设计的良好素材。下面以海螺和花蕾为例。

```
> with(plots):
> sphereplot(x*sin(y), x=-1..3*Pi, y=0..1.5*Pi, orientation=[-144,56], axes=boxed); (海螺)
> animate3d([x, y, 2^x*sin(t*y)], x=1..4, y=1..4, t=0..2, coords=spherical,
```

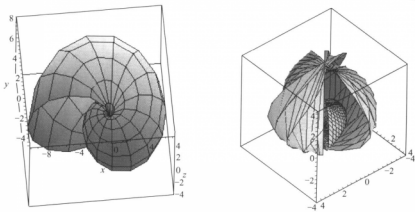


图 12.23 自然形体

axes=boxed); (花蕾)

设计中还可以使用 Maple 软件中的动画技术生成动态图形, 直接观察到整个函数在一定区间上的变化, 从中发现最为优美的造型。例如: `animate3d([x, y, 2^x*sin(t*y)])` 函数可以绘制从一条线到一朵花的动态变化。

实验 7 立体构成的统一和变化

[实验目的和要求] 掌握基本数学原理与立体构成之间的内在联系, 掌握立体构成中美学法则以及在实际中的应用。

[实验原理] 应用函数的几何性质表现立体构成的形式美学法则。

[实验工具] Maple9.5

[实验内容] 立体构成美的表现形式可分为两大类: 有秩序的美与打破常规的美, 表现为统一形式构成与变化形式构成。

(1) 统一形式构成

在统一形式构成法则中, 重复是一种极为重要的美学法则。形象的重复可以引起强烈的视觉冲击, 能表现一种较好的秩序感, 给人一种和谐的气氛 (如图 12.24)。在展示设计中, 将一系列产品有序地排列在一起, 可引起顾客注意。

(2) 变化形式构成

韵律是一种变化的重复, 给人以柔和优雅之感, 表现形式常为渐变 (大小的渐变、形体的渐变, 或几种形式的组合渐变)。例如输入以下命令语句, 就可得到图 12.25。

```
> with(plots);
```

```
> plot3d(theta/phi, theta=0..6*Pi, phi=0..Pi, coords=toroidal(1), axes=boxed, orientation=[-46, 50], style=line);
```

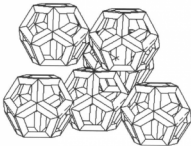


图 12.24 统一形式构成



图 12.25 变化形式构成

另外, 特异也是一种变化的形式构成, 这种形式常常使人感到活泼, 形象优美, 变化丰富。

实验 8 点元素立体构成

[实验目的和要求] 掌握立体构成中点的应用以及点与其他元素的结合所构成的数理美, 理解点的组合排列在形成立体空间中的特点。

[实验原理] 应用点元素生成立体函数图形。

〔实验工具〕 Maple9.5

〔实验内容〕 点是最基本的构成要素。点的大小具有相对性，当环境发生改变，点就有可能变为线、面、体。一系列点的空间布置产生立体构成，在设计构成中纯粹点的造型较少，它常常与其他的元素结合造型。

例如，用 $\sin()$ 函数作 x 轴、 $\cos()$ 函数作 y 轴，半径随 t （变量）的变化而变化的参数作三维立体，用纯粹点构成来反映对称、渐变的美（图 12.26）。

```
> with(plots):
> tubeplot([sin(t), cos(t), 1], t = -Pi..Pi, radius = t/3, axes = boxed, numpoints = 100, style = point);
```

再如，通过应用 $\sin()$ 函数的几何特性以及集合来生成点线结合的立体构成（图 12.27）。

```
> a:=plot3d(sin(x*y), x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi);
> b:=plot3d(sin(x*y), x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi);
> plots[display]({a,b});
```

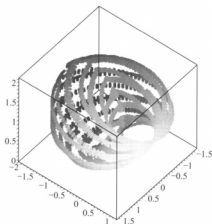


图 12.26 纯粹点的立体构成

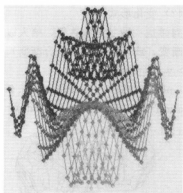


图 12.27 点、线结合的立体构成（一）

其中，`plots[display]()` 函数用于集合或列表的显示；“:”与“;”的区别在于：前者执行命令不显示结果，而后者执行命令且显示结果。图形的显示格式可以通过 `style` 命令来控制，也可以在图形生成之后在右键菜单下来调整。如果没有特殊说明，以后的实验中，一般都在快捷键下操作。

在球形坐标内用 $\sin()$ 函数、 $\cos()$ 函数以及集合，可以得到图 12.28 所示的图形。此图通过点的聚散以及线的渐变，反映出交错感和通透感。命令语句如下。

```
with(plots):
> a:=sphereplot(cos(x)*sin(y), x=-1..3*Pi, y=0..20*Pi, style=point);
> b:=sphereplot(cos(x)*sin(y), x=-1..3*Pi, y=0..20*Pi, style=line);
> c:=sphereplot(cos(x)*sin(y), x=-1..3*Pi, y=0..20*Pi);
> plots[display]({a,b,c});
```

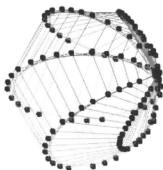


图 12.28 点、线结合的立体构成(二)

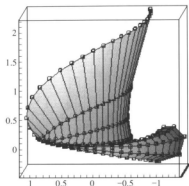


图 12.29 点、线、面的结合

sphereplot() 函数用于球形坐标内的图形显示。

在立体构成中,点、线、面的结合如图 12.29 所示,命令语句如下。

```
> with(plots):
```

```
a:=plot3d(theta/phi,theta=0..6*Pi,phi=0..Pi,coords=toroidal(1),axes=boxed,
orientation=[-46,50]):
```

```
b:=plot3d(theta/phi,theta=0..6*Pi,phi=0..Pi,coords=toroidal(1),axes=boxed,
orientation=[-46,50]):
```

```
c:=plot3d(theta/phi,theta=0..6*Pi,phi=0..Pi,coords=toroidal(1),axes=boxed,
orientation=[-46,50]):
```

```
e:=plot3d(theta/phi,theta=0..6*Pi,phi=0..Pi,coords=toroidal(1),axes=boxed,
orientation=[-46,50],style=point):
```

```
plots[display]({a,b,c,e}):
```

实验 9 线元素立体构成

〔实验目的和要求〕 掌握立体构成中线的应用,并体会立体构成中线形的空间变化的美。理解线的交叉、变形、组合等所形成的立体特点。

〔实验原理〕 应用线元素生成立体函数图形。

〔实验工具〕 Maple9.5

〔实验内容〕 线元素立体构成分为硬线形立体构成(图 12.30)与软线形立体构成(图 12.31)。通过线的聚集、交叉与变换构造立体空间,产生半透明的形体感受,呈现出网格的疏密变化。其中,软性材质必须要有骨架,而硬性材质则可不用。例如

```
> with(plots):
```

```
> plot3d(theta/phi,theta=0..6*Pi,phi=0..2*Pi,coords=toroidal(1),style=line);
```

(此实验是在环型坐标系内,利用 θ 与 ϕ 两个参数在立体空间中的位置关系。并结合线形材质半透明性质所引起的交错效果以及网格的疏密变化的特点,显示了由线形材质所构成的渐变、韵律)

```
> tubeplot([sin(t),cos(t),1],t=-Pi..Pi,radius=t/3,axes=boxed,numpoints=
```

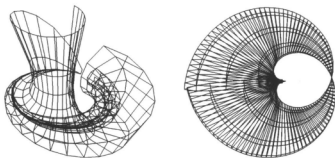



图 12.30 硬线形立体构成

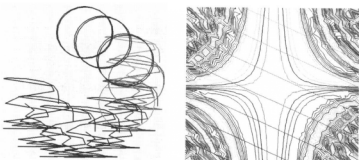


图 12.31 软线形立体构成

```
100,style=line,colour=black);
```

软线形立体构成在壁挂、浅浮雕中有一定应用。例如：应用 $\cos()$ 函数、 $\sin()$ 函数的复合函数可以生成图 12.31 所示图形。

```
> with(plots);
> contourplot({sin(x^2*y), x+2*y}, x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi);
> c1:=[cos(x^2)-2*cos(0.4*y), sin(x)-2*sin(0.4*y), y];
> c2:=[cos(x)+2*cos(0.4*y)^2, sin(x)+2*sin(0.4*y), y];
> contourplot({c1,c2}, x=0..2*Pi, y=0..10, grid=[25,15]);
```

实验 10 面元素立体构成

〔实验目的和要求〕 掌握立体构成中面的应用，并体会立体构成中面元素的空间分割与组合的美以及面的延展特性。

〔实验原理〕 应用面元素生成立体函数图形。

〔实验工具〕 Maple9.5, Mathematica5.0

〔实验内容〕 面具有空间的延展性，较之于线、点在立体造型上更具灵活性。面的立体构成在包装设计、产品设计、空间展示设计中有着广泛的应用。应用 plot3d 函数可进行面的立体图（图 12.32）创作，命令语句如下。

```
> plot3d(sin(x*y), x=-2..2, y=-x..x, axes=boxed);
```

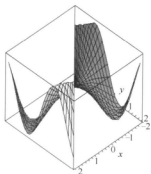


图 12.32 Plot 3d 立体

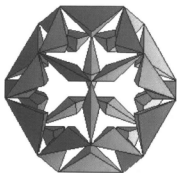


图 12.33 空心立体

在立体构成中，也可把基本几何体挖空，通过切割等方法形成由各种几何面围成的立体型（图 12.33）。

```
> with(geom3d);
> icosahedron(p1, point(o,0,0,0),1.);
> stellate(p2,p1,10);
> p:=draw(p2);
> q:=plottools[homothety](p,3);
> plots[display]([p,q],scaling=constrained,style=patch,lightmodel=light4,orientation=[0,32]);
```

在 Maple 中，星形命令极为有用。它把规则的表面进行挖空，其命令格式为 stellate(), 可生成图 12.34，命令语句如下。

```
> with(plottools);
> plots[display](stellate(hemisphere(capped=false),1/2),
    scaling=constrained,style=patch,lightmodel=light2);
> with(geom3d);
> dodecahedron(t4,o,1.);
> stellate(st4_2,t4,2);
> draw(st4_2,cutout=1/3,lightmodel=light4); (cutout 参数表示在规则表面生成一
```

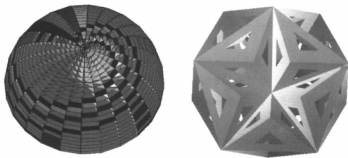


图 12.34 stellate 立体

个与原始图形同样大的多面体，然后，从各个多面体的中心向外以一定的比例切割，本实例以 1:3 的比例切割，它与 cutin 效果相反）。

在 Maple 中，可以由线生成面和体，如图 12.35 所示，主要用到 tubeplot() 函数，参数 radius 用来控制由线成面的半径；Numpoints 用于控制图形的光滑程度；“Pi..Pi”表示函数在 $-180 \sim 180$ 度之间取值；“..”表示范围。命令语句如下。

```
> with(plots);
> tubeplot([3*sin(t), t, 3*cos(t)], t = -3*Pi..4*Pi, radius = 1.2 + sin(t), numpoints = 80);
```

在 Maple 中，还可使用 cutout 命令来模拟竹子编成的器物，如图 12.36 所示。首先调用 plottools 程序包，然后应用 cutout 函数，命令格式为：cutout (图形名 [x, y, z], a/b)。[x, y, z] 表示图形的中心坐标，a/b 表示图形的切割量。命令语句如下。

```
> with(plottools);
> p:=display(cutout(dodecahedron([0,0,0]),3/4));
> a:=[[0,Pi,0],[0,0,Pi],[Pi,0,0],[Pi,Pi,0],[Pi,0,Pi],[0,Pi,Pi],[Pi,Pi,Pi],
[0,0,0]];
> display(seq(rotate(p,op(i)),i=a),style=patchgrid,scaling=constrained);
```

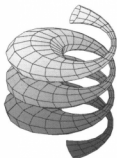


图 12.35 tubeplot 立体



图 12.36 仿竹编器物

面是具有长宽特性的二维造型元素，通过折叠、剪切、黏结等手段生成三维立体，或把实体掏空，形成由面构成的三维体。如图 12.37 所示，命令语句如下。

```
> with(geom3d);
> octahedron(t3,point(o,0,0,0),1.);
> stellate(st3_1,t3,1);
> draw(st3_1,cutout=1/3,lightmodel=light4);
```

一般，作一个由面构成的三维体时，首先需画平面展开图。在 Maple 中，通过函数命令 convert() 实现，如图 12.38 所示，命令语句如下。

```
> with(plottools);
> plots[display](cutout(dodecahedron(),2/3,axes=boxed);
> p:=convert(plot3d(sin(x*y),x=-1..1,y=-1..1,grid=[4,4]),POLYGONS);
> plots[display](cutout(p,1/3),orientation=[52,25],axes=boxed);
```

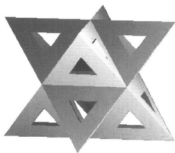


图 12.37 折叠面立体

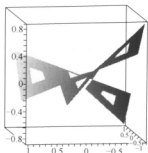


图 12.38 立体平面展开

另外，用 Mathematica 也可进行丰富的面元素立体构成实验，如图 12.39 所示，命令语句如下。

```
Plot3D[Sin[x y], {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}]
```

```
Plot3D[Sin[x y], {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}, FaceGrids -> All, Boxed -> False, ViewPoint -> {0, 0.01, 0.3}]
```

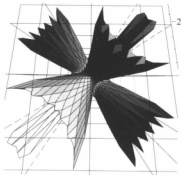
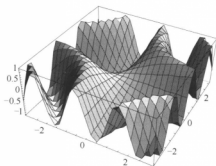


图 12.39 用 Mathematica 生成的面立体

实验 11 块元素立体构成

〔实验目的和要求〕 掌握块元素立体构成方法，并领悟其中包含的几何数理美，体会块面构成带来的充实、稳定、厚重的美感。

〔实验原理〕 应用块元素生成立体函数图形。

〔实验工具〕 Maple9.5

〔实验内容〕 块元素是指具有长、宽、高的空间实体，通过对现实空间的块面化概括处理获得对形体的抽象理解，如图 12.40 所示。命令语句如下。

```
(1) > with(geom3d);
> tetrahedron(gon1, point(o, 0, 0, 0), 3);
> TriakisIcosahedron(gon2, point(o, 0, 0, 3), 3);
> cube(gon3, point(o, 0, 0, -1), 2, 5);
> octahedron(gon4, point(o, 0, 0, -0.5), 3);
```

```

> draw({gon1,gon2,gon3,gon4});
(2) > with(plottools);
> c1:=cylinder([0,0,0],1,0.2);
> c2:=cylinder([0,0,0],0.8,2);
> c3:=cylinder([0,0,2.2],1,0.1);
> c4:=cylinder([1.2,0,1.1],0.4,0.4);
> c5:=cylinder([-1.2,0,1.6],0.4,0.6);
> a:=plots[display](cutout(sphere([0.2,0,3.3]),0.618/1));
> plots[display]((a,c1,c2,c3,c4,c5),scaling=constrained);

```

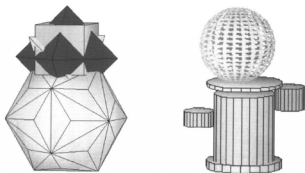


图 12.40 现实空间的块面化

简单几何体的叠加也可产生复杂、优美的立体图形(图 12.41)。命令语句如下。其中, `stellate(ic9, ic, x)` 命令中 x 的取值可在 $0 \sim 18$ 之间变化, x 的变化会产生一系列的图形变换。另外,在修改完某一函数的参数时最好回车,以便系统检验修改是否正确。

```

(1) > restart;
with(geom3d);
> icosidodecahedron(ic,point(o,0,0,0),1.);
stellate(ic9,ic,6);
> draw(ic9,style=patch,lightmodel=light4);
(2) > with(geom3d);
> dodecahedron(gon4,point(o,0,0,0),4);
> icosahedron(gon5,point(o,0,0,0),3);
> draw({gon4,gon5});
(3) > with(plottools);
> c1:=cylinder([0,0,0],15,7);
> c2:=cylinder([-12,-5,7],14,6);
> c3:=cylinder([-20,0,13],13,5);
> c4:=cylinder([-28.5,18],12,4);
> c5:=cylinder([-30,20,22],10,3);
> c6:=cylinder([-28,25,25],9,2);

```

```

> c7:=cylinder([-20,20,27],8,2);
> c8:=cylinder([-12,15,29],6,2);
> c9:=cylinder([6,-5,-10],20,10);
> c10:=cylinder([-5,0,31],15,4);
> plots[display](c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,scaling=constrained);

```

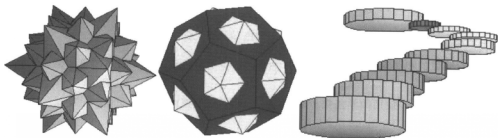


图 12.41 简单几何体的叠加 (苟双晓)

图 12.42 是由圆球与圆柱组合而成的一个灯具设计。命令语句如下

```

> with(plottools);
> c1:=cylinder([1,1,1],20,1);
> c2:=cylinder([1,1,30],3,1);
> c3:=cylinder([1,1,31],5,3);
> c4:=cylinder([1,1,34],10,1);
> c5:=cylinder([1,1,1],1,30);
> d:=sphere([1,1,1],4);
> plots[display](c1,c2,c3,c4,c5,d,scaling=constrained);

```



图 12.42 灯具设计 (苟双晓)

本节主要通过点、线、面、块四种构造元素的应用来把握立体构成中的美学特征与数学之间的内在联系。对更为复杂的立体构成图形可以使用编程语言,并结合基本命令做出一些甚至用常规方法无法完成的构成作品。

12.3 色彩构成实验

在设计领域里,色彩构成是造型艺术的重要基础。它是指将两种以上的色彩,根据不同的审美需要,按照一定的规律和原则,重新进行组合和搭配,从而构成新的色彩组合。通过色彩构成原理的数理化应用使色彩设计更为体系化,充分展现色彩设计的数理美,应用数学知识创造更为丰富的色彩世界。

实验 12 色彩系统

[实验目的和要求] 建立色彩系统模型,初步了解色彩原理,为后续色彩构成实验打下良好基础。

[实验原理] 使用数学函数控制色彩,让色彩产生连续均匀的变化。

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容]

(1) 色与光的关系

人们之所以能感受到缤纷的色彩,是因为有光的存在。通过三棱镜把太阳光分解为色彩光谱,由红开始依次为橙、黄、绿、青、蓝、紫。光的三原色是红、绿、蓝;色料的三原色是品红、柠檬黄、湖蓝。其中,通过对光的三原色的各种混合,可以得到任何色光。以下是生成七彩色条与色相环(图 12.43)的命令语句。

```
Show[Graphics[Table[{Hue[i], Rectangle[{i, j}, {i + 0.1, j + 0.1}]}], {i, 0.1, 0.1}, {j, 0.1, 0.1}]]];
```

```
dt = 2Pi/256;  
data3 = Table[{Hue[t/(2Pi)], Polygon[{Cos[t], Sin[t], Cos[t + dt], Sin[t + dt], 3Cos[t + dt], 3Sin[t + dt], {3Cos[t], 3Sin[t]}]}, {t, 0.2Pi, dt}];  
data4 = Table[Text[t, {3.3Cos[t*2Pi], 3.3Sin[t*2Pi]}], {t, 0.9, 0.1}];  
Show[Graphics[{data3, data4}], AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All]
```

(2) 色彩三要素与色立体

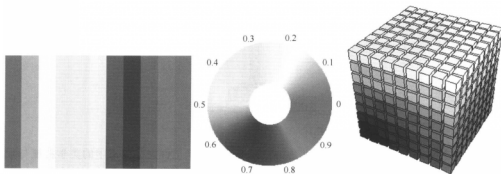


图 12.43 七彩色条与色相环

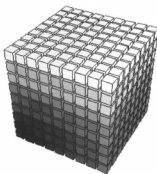


图 12.44 色立体

人眼可以分辨的色彩有上万种,每一色彩都含有色相、明度和纯度三要素。单一要素的变化可用二维平面表示,多个要素的变化则可用立体的交叉结构表示。由此,建立色彩立体模型,用三维结构(图 12.44)表示色彩的色相、明度和纯度的变化,命令语句如下。

```
cub=Table[{RGBColor[x,z,y],Cuboid[10{x,y,z}]},{x,0,1,1/8},{y,0,1,1/8},
{z,0,1,1/8}];
Show[Graphics3D[cub],Lighting→False,Boxed→False]
```

实验 13 色 相 对 比

[实验目的和要求] 色相是色彩构成的重要元素之一。在掌握数学二维绘图函数的基础上,学习使用关于色彩函数的设置。利用简单的图形造型,进行色相配色。

[实验原理] 利用色彩参数函数 RGBColor[Red, Green, Blue], Hue[Color], GrayLevel[Gray] 以及一些二维绘图函数。

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容]

(1) 无色系的色彩构成

黑白两色分别位于色立体上两端,是最单纯,最极限的色彩。黑色调有阴郁、悲哀、恐怖的含义,白色调则有纯净、明朗、清爽、高贵的含义。由黑到白的渐变命令语句如下。

```
Show[Graphics[Table[{GrayLevel[i],Rectangle[{i,j},{i+0.1,j+0.1}]},{i,0,1,0.1},{j,0,1,0.1}]]]
```

用黑色作背景可使整个画面收敛统一,用白色作背景可使画面清晰、明快。黑色与白色的组合(图 12.45)可产生强烈的对比效果,给人以精悍、洗练的感觉。

```
l={{2,-2},{2,2},{-2,2},{-2,-2},{2,-2}];
p=Graphics[{Thickness[.01],Line[l]}];
q=Graphics[{{RGBColor[0,0,0],Disk[{0,0},1.5]}]];
m=Graphics[{{RGBColor[1,1,1],Disk[{4,0},1.5]}]];
n=Graphics[{{RGBColor[0,0,0],Rectangle[{2,-2},{6,2}]}]];
Show[n,m,p,q,AspectRatio→1]
```

黑与白是永恒的对比色,象征着世界的阴极与阳极。太极图(图 12.46)是黑色与白色运用极佳的典范,它以黑白两色的循环形式来表示宇宙永恒运动,给人以无限的力量感和神秘感。

```
Show[Graphics[{{RGBColor[0,0,0],Disk[{0,0},5]},{RGBColor[1,1,1],Disk[{0,0},5,{0,180 Degree}]},{RGBColor[0,0,0],Disk[{2.5,0},2.5]},{RGBColor[1,1,1],Disk[{2.5,0},2.5]},{RGBColor[0,0,0],Disk[{2.5,0},0.8]},{RGBColor[1,1,1],Disk[{2.5,0},0.8]}],Background→RGBColor[0.6,0.812,0.953],AspectRatio→1];
```

(2) 无色系与有色系的色彩对比构成

在无色系的世界里,如果点缀一些少量的高纯度的有色系(图 12.47),有时会使画面跳跃起来,获得生气,起到了点睛之笔的作用。控制颜色使用的函数有四个,分别是 RGBColor[Red, Green, Blue], Hue[Color], CMYKColor[Cyan, Magenta, Yellow,



图 12.45 黑白背景对比



图 12.46 太极图

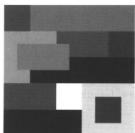


图 12.47 无色系与有色系对比配色

Black], GrayLevel[Gray], 参数值均在 0~1 之间。

```
Show[Graphics[{GrayLevel[0], Rectangle[{0, 0}, {3, 1}], GrayLevel[0.26], Rectangle[{0, 1}, {2, 2}], GrayLevel[0.58], Rectangle[{0, 2}, {3, 4}], GrayLevel[0.25], Rectangle[{0, 4}, {1, 5}], GrayLevel[0.45], Rectangle[{1, 4}, {5, 5}], GrayLevel[0.3], Rectangle[{2, 3}, {4, 4}], GrayLevel[0], Rectangle[{1, 2}, {5, 3}], GrayLevel[0.2], Rectangle[{4, 3}, {5, 4}], GrayLevel[0.8], Rectangle[{3, 0}, {5, 2}], RGBColor[0.886, 0.267, 0.024], Rectangle[{1.5, 2.5}, {2.5, 3.5}], RGBColor[0.1, 0.1, 0.6], Rectangle[{3.5, 0.5}, {4.5, 1.5}]], AspectRatio -> Automatic];
```

(3) 双色的色相对比

色相作为色彩的三要素之一，与明度和纯度相比，它是最为单纯和明确的。色相的配色分为，强度对比色相配色，中度对比色相配色，弱度对比色相配色，同类色相配色以及多色彩配色。任何两种颜色放置在一起配色，往往都会失去其原有的色彩特性，相互对比，相互衬托为另一种不同的色彩效果。首先，通过一个简单双色色相对比配色练习（图 12.48），展开对色相的理解。

```
Show[DensityGraphics[{{2, 3}, {3, 1}}, ColorFunction (RGBColor[#, 0.5, 0.5] &.)]];
```

(4) 色相的强度对比

使用补色配色，可以得到最强的色相对比效果。互补色指在色相环上，距离在 180° 左右的色彩组合，最典型的是红与绿，黄与紫，蓝与橙。而黄色与紫色配置在一起时，会产生炫目的对比效果，是三只补色最为冲突的一对。最强度对比色（图 12.49，图 12.50）命令语句如下。

```
n=Show[Graphics
```

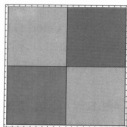


图 12.48 双色色相对比

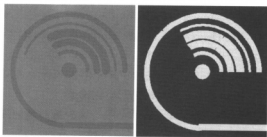


图 12.49 最强度对比色相配色（一）

```
[{RGBColor[0.9,0,0],
{Thickness[.03],Circle[{0,0}..2,{0,120 Degree}]},
{Thickness[.05],Circle[{0,0}..3,{0,120 Degree}]},
{Thickness[.06],Circle[{0,0}..4,{0,120 Degree}]},
{Thickness[.02],Circle[{0,0}..5,{0,120Degree}]},
{Thickness[.04],Circle[{0,0}..6,{0,270 Degree}]}}],
```

```
AspectRatio→Automatic]
```

```
m=Graphics[{RGBColor[0,0.6,0],Rectangle[{-0.7,-0.7},{0.7,0.7}]]}
```

```
l=Graphics[{RGBColor[0.9,0,0],Rectangle[{-0.03,-0.627},{0.7,-0.56}]]}
```

```
p=Graphics[{RGBColor[0.9,0,0],Disk[{0,0},0.08]}]
```

```
Show[m,n,l,p,AspectRatio→1.]
```

```
rpoly=Table[{Random[],Random[]},{8}];
```

```
Show[Graphics[{ {RGBColor[0.99,0.937,0.278],Polygon[7rpoly]}, {RGBColor
[0.102,0.443,0.953],Polygon[6rpoly]}, {RGBColor0.961,0.173,0.137],Polygon
[5rpoly]}, {RGBColor[0.231,0.631,0.1],Polygon[4rpoly]}}, Background→RGBColor
[0.2,0,0.5]]];
```

```
Clear[rpoly]
```

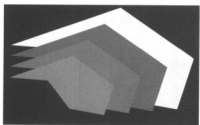


图 12.50 最强度对比色相配色 (二)

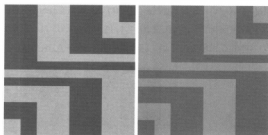


图 12.51 次强度对比色相配色 (一)

在色相环上, 相距 150° 左右的色彩配色, 是近似补色, 是次强度对比色相配色 (图 12.51, 图 12.52)。其命令语句如下。

```
m=Show[Graphics[{RGBColor[0.455,0.776,0.106],Rectangle[{0,0},{8,4]},RG-
BColor[0.106,0.341,0.776],Rectangle[{0,0},{6,3.5}],RGBColor[0.455,0.776,
0.106],Rectangle[{0,0},{4,3}],RGBColor[0.106,0.341,0.776],Rectangle[{0,0},{2,
2}],RGBColor[0.455,0.776,0.106],Rectangle[{0,0},{1,1}]}]]
```

```
n=Show[Graphics[{RGBColor[0.106,0.341,0.776],Rectangle[{0,4},{8,8]},RG-
BColor[0.455,0.776,0.106],Rectangle[{2,4.5},{8,8}],RGBColor[0.106,0.341,
0.776],Rectangle[{4,5},{8,8}],RGBColor[0.455,0.776,0.106],Rectangle[{6,6},{8,
8}],RGBColor[0.106,0.341,0.776],Rectangle[{7,7},{8,8}]}]]
```

```
Show[m,n,AspectRatio→1]
```

```

<<GeometryPolytopes'
NumberOfEdges[Octagon]
Area[Octagon]
Vertices[Octagon]
Show[Graphics[{RGBColor[0.937,0.812,0.588],PointSize[.3],Point/@%},Back-
ground->RGBColor[0.741,0.906,0.969],AspectRatio->Automatic]]

```



图 12.52 次强度对比色相配色 (二)

色彩在色相环上的距离低于 120° 时, 配色效果 (图 12.53) 虽然不像强度对比系列那样直接, 震撼, 给人强烈的视觉效果, 但是, 仍然有着较强的色彩对比效果, 例如红色与蓝色的配比。命令语句如下。

```

Show[Graphics[{RGBColor[0.9,0.2,0.2],Thickness[.02],Circle[{0,0},0.2],Cir-
cle[{0,0},0.3],Circle[{0,0},0.4],Circle[{0,0},0.5],Circle[{0,0},0.6]},Graphics
[{RGBColor[0.9,0.2,0.2],Disk[{0,0},0.1,{0,180Degree}]}],Background->RGBColor
[0.016,0.427,0.741],AspectRatio->Automatic]

```

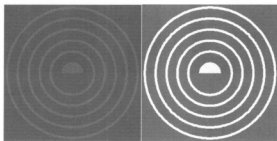


图 12.53 中强度对比色相配色

色彩在色相环上的距离低于 60° 时, 色相距离较为接近, 色彩对比不是很明显, 在配色时很难把握。但是有时候, 如果能控制住临近色彩的微妙对比变化, 就会获得单纯、统一、柔和的色彩效果 (图 12.54)。命令语句如下。

```

vertices1={{0,-1},{1,0},{0,1},{-1,0},{0,-1}};
p1=Graphics[{RGBColor[0.973,0.537,0.094],Polygon[vertices1]}];
l1=Graphics[{Thickness[.02],RGBColor[1,1,1],Line[vertices1]}];
vertices2={{1,-1},{2,0},{1,1},{0,0},{1,-1}};

```

```

p2=Graphics[{RGBColor[0.973,0.537,0.094],Polygon[vertices2]}];
l2=Graphics[{Thickness[.02],RGBColor[1,1,1],Line[vertices2]}];
Show[p1,l1,p2,l2,Background->RGBColor[1,0.68,0]];

```

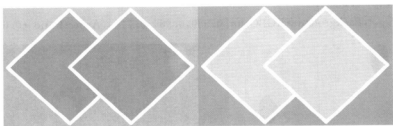


图 12.54 弱强度对比色相配色

实验 14 明度对比

【实验目的和要求】 进一步熟悉色彩函数的使用，理解色彩明度的含义，对比实验得到的图例的明度效果。

【实验原理】 几何函数与色彩函数的使用。

【实验工具】 Mathematica 5.0

【实验内容】

(1) 明度对比混色练习

色彩的明度对比也称为色彩的黑白度对比，明度控制着色彩从亮到暗，从浑浊到鲜艳的整体效果。明度最亮的是白，最暗的则是黑，当色彩越靠近白色，明度越高，反之亦成立。每种色彩都具有自身的明度值，例如黄色的明度值最高，给人以耀眼的视觉感受。蓝色的明度对比（图 12.55）命令语句如下。

```
v1={{-1,0},{0,-1},{1,0},{0,1}};
```

```
Show[Graphics[{Hue[0.55],Polygon[5*v1],Hue[0.57],Polygon[4*v1],Hue[0.58],Polygon[3*v1],Hue[0.6],Polygon[2*v1],Hue[0.7],Polygon[v1]}]]
```

(2) 长调明度色彩的配色

根据孟塞尔色立体，将黑色和白色按等比例混合，可以建立一个九个等级的明度对比色标。将这九个等级均分，可以划分出三个明度基调——高明基调、中明基调、低明基调。将不同明度的色调组合，可以得到丰富画面的色调。明度级别差在 3 个阶段以下的配色组合，称为短调，而级别差在 5 个阶段以上的配色组合称为高调。短调有模糊、含蓄的效果，长调具有强烈、刺激的效果。将高明基

调、中明基调、低明基调与长调、短调组合，可以组合成很多不同明度的效果。例如高长调，可以将第 8 级明度为基色调（基色调指画面上占主体地位的色调）和第 1、9 级明度色调为搭配色调（搭配色调指画面上占次要地位的色调）构成，由此可以获得一种明快的配色效果。高长调与低长调（图 12.56）的命令语句如下。

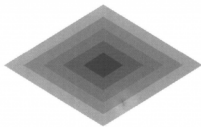


图 12.55 明度对比混色练习

```
p=Graphics[{{RGBColor[0.067,0.286,0.012],Disk[{1,0},0.3]}, {RGBColor[0.067,0.286,0.012],Disk[{-2.5,1},0.3]}}];
l=Plot[Sin[x],{x,-3,3},PlotStyle->{RGBColor[0.808,0.933,0.776],Thickness[0.18]},Axes->False];
Show[p,l,Background->RGBColor[0.980,0.984,0.714],AspectRatio->0.6]
```

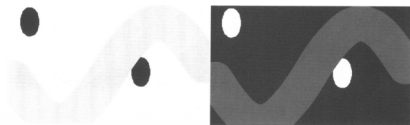


图 12.56 高长调与低长调

高短调与中间短调（图 12.57）的命令语句如下。

```
Table[Point[{n^2,Prime[n]}],{n,5}];{Point[{0.5,0.5}],Point[{1,1}],Point[{1.5,1.5}],Point[{2,2}],Point[{2.5,2.5}]}];
y=Show[Graphics[PointSize[0.1],RGBColor[0.816,0.910,0.933],%],PlotRange->All]
x=Show[Graphics[RGBColor[0.976,0.965,0.812],Rectangle[{0,0},{3,3}],{RGBColor[0.753,0.835,0.773],Disk[{1.,2.3},0.6]}, {RGBColor[0.753,0.835,0.773],Thickness[.05],Circle[{0.28,0.2},1.2,{0,100 Degree}]}, {RGBColor[0.816,0.910,0.933],Thickness[.05],Circle[{0.3,0.3},1.4,{0,100 Degree}]}],AspectRatio->Automatic,Axes->False];
Show[x,y,AspectRatio->Automatic]
```

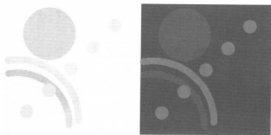


图 12.57 高短调与中间短调

实验 15 纯度对比

〔实验目的和要求〕 理解色彩明度的含义，对比实验得到的图例的纯度效果。

〔实验原理〕 几何函数与色彩函数的使用。

〔实验工具〕 Mathematica 5.0

〔实验内容〕 通俗地讲,色彩的纯度指的是色彩的鲜艳程度,红色是纯度最高的色彩,蓝绿色是纯度最低的色彩。可通过两种方法降低色彩的纯度,一是与无色系的颜色混合,即黑、灰、白,另一种是与该色彩的互补色混合。高纯度的色彩会给人醒目、靓丽的感觉,低纯度的色彩会给人含蓄、丰富的感觉。

(1) 色彩纯度秩序的混色练习 (图 12.58)

命令语句如下。

```
Show[Graphics[Table[{RGBColor[i,0,0],Rectangle[{i,j},{i+0.1,j+0.1}},{i,0,1,0.1}},{j,0,1,0.1}]]];
```

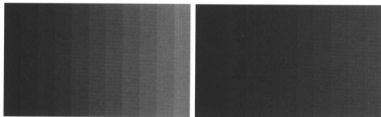


图 12.58 色彩纯度秩序的混色练习

(2) 色彩纯度对比配色 (图 12.59)

命令语句如下。

```
Table[Point[{n^2,Prime[n]}],{n,6}];{Point[{ -0.5,1.5}],Point[{0,1.6}],Point[{0.5,1.7}],Point[{1,1.6}]}];
```

```
y=Show[Graphics[{PointSize[0.1],RGBColor[0.388,0.145,0.063],%}],PlotRange->All]
```

```
pentagon=Table[{Sin[2 Pi n/5],Cos[2 Pi n/5]},{n,5}]
```

```
t=Show[Graphics[{RGBColor[0.482,0.275,0.271],Polygon[pentagon]}]]
```

```
vertices={{0,1},{1.5,2},{3,1},{0,1}};
```

```
m1=Graphics[{RGBColor[0.225,0.157,0.091],Polygon[vertices]}]
```

```
m2=Graphics[{RGBColor[0.533,0.310,0.231],Rectangle[{0.5,-1},{2.5,1}]]]
```

```
Show[t,m1,m2,y,Background->RGBColor[0.375,0.235,0.220],AspectRatio->0.6]
```

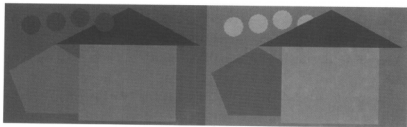


图 12.59 色彩纯度对比配色

实验 16 色彩表达

〔实验目的和要求〕 将色彩依附平面构成基本要素(点、线、面),在抓住这些图形

特点的基础上,充分发挥色彩的创意与表现。

【实验原理】 函数生成的构成三要素与色彩函数的结合。

【实验工具】 Mathematica 5.0

【实验内容】 在色彩设计中,不能只注重色彩关系变化,而忽略了对形的要求。一个好的设计,应该将形与色完美、有机地结合在一起。

(1) 点状色彩 (图 12.60)

命令语句如下:

```
DensityPlot[Sin[x/y],{x,-1,1},{y,-1,1},ColorFunction->Hue];
```

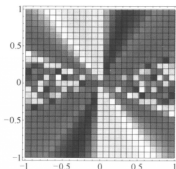


图 12.60 点状色彩

(2) 线状色彩 (图 12.61, 图 12.62)

命令语句如下。

```
m={};
```

```
For[x=0,x<=1,x=x+0.03555,
```

```
  m1:=Hue[x];
```

```
  m2:=Circle[{0,0},x];
```

```
  AppendTo[m,{m1,m2}];];
```

```
Show[Graphics[m],AspectRatio->1,ImageSize->300];
```

```
h1:=Table[{0.001*n*(3*Cos[t]+Cos[3t]),0.001*n*(2*Sin[t]-Sin[2t])},{n,1,20}]
```

```
h11:=ParametricPlot[Evaluate[h1],{t,0,2Pi},
```

```
  Axes->False,PlotStyle->Evaluate[Table[Hue[(n/2+9)/20],{n,1,20}]],PlotRange->All]
```

```
h2:=Table[{-0.001*n*(3*Cos[t]+Cos[3t]),0.001*n*(2*Sin[t]-Sin[2t])},{n,1,20}]
```

```
h22:=ParametricPlot[Evaluate[h2],{t,0,2Pi},
```

```
  Axes->False,PlotStyle->Evaluate[Table[Hue[(n/2+9)/20],{n,1,20}]],PlotRange->All]
```

```
h3:=Table[{0.001*n*(2*Sin[t]-Sin[2t]),-0.001*n*(3*Cos[t]+Cos[3t])},{n,1,20}]
```

```

h4:=Table[{-0.001*n*(2*Sin[t]-Sin[2t]),0.001*n*(3*Cos[t]+Cos[3t])},{n,
1,20}]
h33:=ParametricPlot[Evaluate[h3],{t,0,2Pi},
Axes→False,PlotStyle→Evaluate[Table[Hue[(n/2+9)/20],{n,1,20}]],Plot-
tRange→All]
h44:=ParametricPlot[Evaluate[h4],{t,0,2Pi},
Axes→False,PlotStyle→Evaluate[Table[Hue[(n/2+9)/20],{n,1,20}]],Plot-
tRange→All]
Show[h11,h22,h33,h44]

```

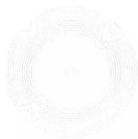


图 12.61 线状色彩 (一)

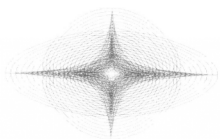
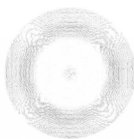


图 12.62 线状色彩 (二)

(3) 面块色彩 (图 12.63, 图 12.64)

利用软件里的等高线的函数,生成一些色彩绚烂的面状图案。

命令语句如下。

```
ContourPlot[x^2-y^2,{x,-1,1},{y,-1,1},ColorFunction→(RGBColor[0.0,
#]&)](1)
```

```
ContourPlot[Sin[xy],{x,-5,5},{y,-5,5},ColorFunction→(RGBColor[0.2,#,
0.1]&),ContourLines→False];(2)
```

```
DensityPlot[Cos[xy],{x,-3,3},{y,-3,3},ColorFunction→(RGBColor[# ,0,0]
&)](3)
```

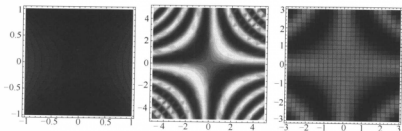


图 12.63 面状色彩

形与色搭配,可以产生空间感。例如图 12.64,利用色彩的微妙变化,就可以产生立体的效果。

```
Show[Graphics[{RGBColor[0.561,0.808,0.345],Polygon[{{1,0.5},{2,1.5},{2,
```



```
3},{1,4},{0,3},{0,1.5}}]],Graphics[{RGBColor[0.749,0.890,0.329],Polygon[{1,4},{2,4},{3,3},{2,3}]],Graphics[{RGBColor[0.451,0.761,0.353],Polygon[{2,3},{3,3},{3,1.5},{2,1.5}]],Graphics[{RGBColor[0.451,0.701,0.353],Polygon[{2,1.5},{3,1.5},{2,0.5},{1,0.5}]]],
```

```
Graphics[{RGBColor[0.561,0.808,0.345],Polygon[{4,0.5},{5,1.5},{5,3},{4,4},{3,3},{3,1.5}]],Graphics[{RGBColor[0.749,0.890,0.329],Polygon[{4,4},{5,4},{6,3},{5,3}]],Graphics[{RGBColor[0.451,0.761,0.353],Polygon[{5,3},{6,3},{6,1.5},{5,1.5}]],Graphics[{RGBColor[0.451,0.701,0.353],Polygon[{5,1.5},{6,1.5},{5,0.5},{4,0.5}]]],
```

```
Graphics[{RGBColor[0.561,0.808,0.345],Polygon[{7,0.5},{8,1.5},{8,3},{7,4},{6,3},{6,1.5}]],Graphics[{RGBColor[0.749,0.890,0.329],Polygon[{7,4},{8,4},{9,3},{8,3}]],Graphics[{RGBColor[0.451,0.761,0.353],Polygon[{8,3},{9,3},{9,1.5},{8,1.5}]],Graphics[{RGBColor[0.451,0.701,0.353],Polygon[{8,1.5},{9,1.5},{8,0.5},{7,0.5}]]],AspectRatio→Automatic]
```

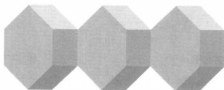


图 12.64 块状色彩

实验 17 色彩心理

【实验目的和要求】 通过建立色彩与心理对应感受的关系，使色彩的使用更为人性化。

【实验原理】 函数的几何性质与色彩的结合。

【实验工具】 Mathematica 5.0

【实验内容】 人们生活在一个色彩的世界里，通过长期的经验积累，习惯性地 will 一些色彩与心理情绪对应起来。例如，红色代表了热情，奔放，燃烧，容易使人兴奋，同时也使人很容易联想到更深一层的含义，例如战争、流血、夕阳等。如图 12.65 所示为不同色彩组合的心理反应，其中，(a) 番茄汁的甜蜜，(b) 咖啡的冷静，(c) 纯净水的天真，(d) 橙汁的快乐，(e) 五颜六色的青春滋味。

```
Show[Graphics[{RGBColor[0.933,0.631,0.514],Rectangle[{0,0},{3,3}],
RGBColor[0.986,0.710,0.627],Rectangle[{3,0},{6,3}],
RGBColor[0.988,0.614,0.578],Rectangle[{6,0},{9,3}],
RGBColor[0.988,0.695,0.635],Rectangle[{0,3},{3,6}],
RGBColor[1,0.773,0.682],Rectangle[{3,3},{6,6}],
RGBColor[1,0.569,0.4],Rectangle[{6,3},{9,6}],
RGBColor[0.958,0.469,0.4],Rectangle[{0,6},{3,9}],
RGBColor[1,0.365,0.216],Rectangle[{3,6},{6,9}],
```

```
RGBColor[0.984,0.506,0.506],Rectangle[{6,6},{9,9}]],  
AspectRatio→Automatic]
```

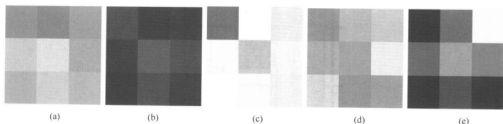


图 12.65 不同色彩组合的心理反应

实验 18 色彩应用

[实验目的和要求] 色彩构成是科学的问题，而在使用中更是一个感性的问题。真正合理而个性化地使用色彩是学习色彩构成的最终目的。

[实验原理] 几何函数与色彩函数的综合使用。

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容] 色彩使设计变得完整而丰富，色彩应用是一门综合的艺术，是感性与理性交织在一起的艺术，不是仅掌握了一些色彩要素和配色技巧就可以运用得当的，在平常的实践里，需要不断用心揣摩和推敲。

(1) 蒙特里安的色彩构成模仿图

荷兰画家蒙特里安利用三原色和三种无色（黑、白、灰）以及水平和垂直的网格结构，绘制的作品堪称色彩构成的典范。下面，利用一些简单函数的重复，模仿绘制一幅大师的色彩构成图案（图 12.66）。命令语句如下。

```
t1=Graphics[Table[{Thickness[0.02],Line[{0,0},{10,0}],Line[{0.5,20},  
{0.5,-10}],Line[{1,20},{1,-10}],Line[{4,20},{4,-10}],Line[{6,20},{6,  
-10}],Line[{8.5,18},{8.5,-10}],Line[{9,20},{9,-10}],Line[{2.5,3},  
{2.5,10}],Line[{7.5,3},{7.5,10}],Line[{6.3,0},{6.3,-10}],Line[{2.5,18},  
{2.5,20}],Line[{7.5,18},{7.5,20}],Line[{0.5,-8},{9,-8}],Line[{1,3},{9,  
3}],Line[{0,10},{4,10}],Line[{6,10},{10,10}],Line[{0,18},{10,18}]}];
```

```
t2=Graphics[RGBColor[0.9,0.3,0],Rectangle[{1,3},{6,18}],Rectangle[{9,  
-10},{10,0}],
```

```
RGBColor[1,1,0.4],Rectangle[{6,10},{9,20}],Rectangle[{0,-10},{1,0}],
```

```
RGBColor[0,0,0.5],Rectangle[{8.5,-9.5},{9,0}],Rectangle[{6.3,-9.9},{9,  
-5.5}],Rectangle[{6,-8},{6.3,0}],
```

```
RGBColor[0.15,0.15,0.15],Rectangle[{1,-6.5},{3.8,3}],Rectangle[{3.8,  
-9.5},{6.3,-6}],Rectangle[{6.3,-6},{9,3}]];
```

```
Show[t2,t1,AspectRatio→1]
```

(2) 制作标准色谱（图 12.67，图 12.68）

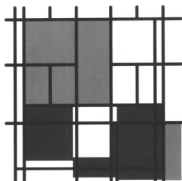


图 12.66 仿蒙德里安色彩构图

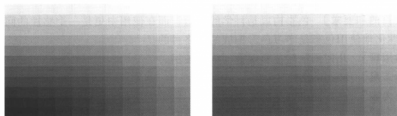


图 12.67 色谱 (一)

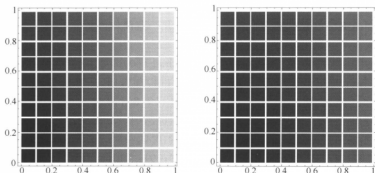


图 12.68 色谱 (二)

命令语句如下。

```
Show[Graphics[Table[{RGBColor[i,j,0],Rectangle[{i,j},{i+0.1,j+0.1}]},{i,0,1,0.1},{j,0,1,0.1}]]];
```

```
Table[{RGBColor[0.1,g,b],Rectangle[{g,b},{g+0.09,b+0.09}]},{g,0,0.9,0.1},{b,0,0.9,0.1}];
```

```
Show[Graphics[%],AspectRatio→Automatic,Frame→True]
```

(3) 色彩构成综合实验

圆形是最为基本的函数图形，但是如果将其与色彩巧妙地结合，形成色彩渐变的结果，也会组合成一幅精美的构成图案（图 12.69）。

纹样设计在现代图形设计中具有重要的作用，其应用领域极为广泛。图 12.70 是通过数学函数公式生成基本的图案轮廓，再运用其他软件画一些绿叶作装饰，然后将色彩与图形有机地融合，就构成了一幅漂亮的花卉纹样图案。

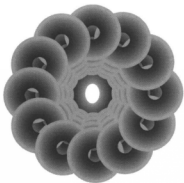


图 12.69 圆的色彩构成（杜娜）

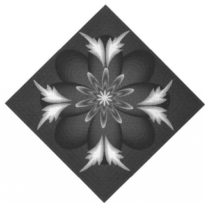


图 12.70 玫瑰形线组合图案纹样（杜娜）

12.4 小结

① 设计构成是设计艺术学的基础科目，被誉为艺术设计中的数学，通过数学符号、数值化的设计使得数学知识在设计实践中的作用益发彰显。

② 平面构成实验包括了平面构成三要素、平面重复构成、平面渐变构成、平面发射构成和平面特异构成实验。

③ 立体构成实验包括了基本形与自然形、立体构成的统一和变化、点元素立体构成、线元素立体构成、面元素立体构成和块元素立体构成。

④ 色彩构成实验包括了色彩系统、色相对比、明度对比、纯度对比、色彩表达、色彩心理和色彩应用实验。

⑤ 设计构成由数学软件实现，简洁又准确，透彻而精致，使数学与艺术的结合更加紧密。

第 13 章

分形艺术实验



- 分形图形生成方法实验
- 分形的自相似特性实验
- 分形艺术综合实验
- 小结

分形可以看成是一种绘画语言。世界普遍存在着诸如花草树木、山川河流、烟雾云彩等极不规则的几何图案。大自然不断地向人们展示其美丽多变的自然形态。分形几何有自己对世界的理解：整个世界的表象是复杂的，但不是杂乱无章的，复杂表象的背后，存在着简单的规则，简单规则的反复迭代构成了纷繁的世界。在表现手法上，通过调动计算机的功能，将一个数学关系通过分形迭代表达成一幅可视化的图形。

分形艺术实验的目的在于通过实验进一步加深对分形基本原理的认识，激发学习和应用分形的兴趣，并学习用分形语言来描述美丽的世界。使用的软件可以采用通用数学软件 Mathematica，也可以应用 Iterations 和 Fractint20.0 等专用分形软件。只要具有强烈的创新意识和具备一定的数学基础，就能设计出优秀的分形作品。当然，分形图形的生成由于其本身固有的非线性，参数值微小的变化（一个小的扰动）即可引起生成图形的强烈的反应和整体效果的巨大变化，甚至进入混沌状态，这就需要加强实验，不断探索，积累经验，总结规律，最终可以随心所欲得到自己想要的复杂图案。

13.1 分形图形生成方法实验

实验 1 Koch 曲线构造方法

【实验目的和要求】 了解分形元及 Koch 曲线的特点及其构造方法，由给出的 Mathematica 中生成的图形代码，体验和掌握 Koch 曲线构造的分形方法。

【实验原理】 分形元的迭代。

【实验工具】 Mathematica 5.0

【实验内容】 了解分形元概念和构造方法，并在数学软件中生成 Koch 曲线，通过修改参数观察分形效果。

(1) 分形元

早在 19 世纪末及 20 世纪初，有些科学家就构造出一些边界极其不光滑的图形，这类图形有一个共同特点，即图形都按一定规则 R 通过对初始图形 F 不断的修改获得。其中

最具代表性的图形是 Koch 曲线。

(2) Koch 曲线及其构造方法

给定一条线段 F_0 ，将该线段三等分，并将中间的一段用与该线段为边的等边三角形的另外两条边代替，得到图形 F_1 。然后，再对图形 F_1 中的每一小段都按照上述方式修改以至无穷。则最后得到的极限曲线 $F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$ ，即所谓的 Koch 曲线，如图 13.1 所示。

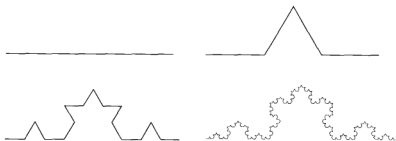


图 13.1 Koch 曲线

Koch 曲线的修改规则 R 是将每一条线段 F_0 用一条折线 F_1 代替，称 F_1 为该分形的分形元。分形的基本特性完全由分形元决定。因此，给定一个分形元，就可以生成各种各样的分形图案。

从一个正三角形出发，用 Koch 曲线的分形元作迭代得到的极限图形称为 Koch 雪花。Koch 雪花与 Koch 曲线一样，其边长也是无限长的。

(3) Koch 曲线的生成

在 Mathematica 中输入以下代码。

```
koch [ab_List] := Block [{tmp = {}, i, pnum = Length [ab], alpha = 60 Degree,
```

```
sa = Sin [alpha], ca = Cos [alpha], c, d, e, T = {{ca, -sa}, {sa, ca}}},
```

```
For [i = 1, i < pnum, i ++,
```

```
c = ab [[i]] * 2/3 + ab [[i+1]] / 3;
```

```
e = ab [[i]] / 3 + ab [[i+1]] * 2/3;
```

```
d = c + T. (e - c);
```

```
tmp = Join [tmp, {ab [[i]], c, d, e, ab [[i+1]]}];
```

```
Return [tmp]]
```

```
pt = {{0, 0}, {1, 0}};
```

```
Show [Graphics [Line[Nest [koch, pt, 6]],
```

```
AspectRatio -> Sqrt [3] / 6], Background -> RGBColor [0.3, 0.4, 0.1]]
```

其中 `koch [ab_List]` 是定义的 Koch 曲线函数，通过 6 次迭代得到 Koch 曲线。

其中，只需改变迭代次数即可得到不同的图形样式（图 13.2）。

可以看出，图 13.3 就像一座神秘的宗教建筑，给人以启发。意大利设计师索杜 Celestino. Sodd 教授利用计算机开创的生成设计艺术已经应用在建筑和产品的生成上，其生



图 13.2 不同迭代次数获得的 Koch 曲线



图 13.3 Koch 曲线的美宗教建筑图

成艺术和分形艺术有其内在联系，都有基本的编码即分形元。

实验 2 Sierpinski 三角构造方法

[实验目的和要求] 掌握 Sierpinski 三角形的生成方法，由给出的 Mathematica 中生成的图形代码，体验和掌握 Sierpinski 分形方法。

[实验原理] 分割迭代。

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容] Sierpinski 三角形构造

(1) Sierpinski 三角形的构造

Sierpinski 三角形是对给定的三角形 S_0 (填成黑色)，取各边的中点，连接起来构成一个相似三角形，得到图形 S_1 。周围还有三个黑色小三角形，再对这三个黑色三角形分别按上述的方法修改以至无穷。最后得到的图形称为 Sierpinski 三角形，它的分形元是 S_1 ，如图 13.4。



图 13.4 Sierpinski 三角形

(2) Sierpinski 三角形的生成

在软件 Mathematica 中输入以下代码。

```
sierpinski [tris_List]; =Block [{tmp= {}, i, pnun=Length[tris] /3, a, b,
c, d, e, f},
For [i=0, i<pnun, i=i+1,
a=tris [[3 i+1]]; b=tris [[3 i+2]]; c=tris [[3 i+3]];
d=(a+b) /2; e=(a+c) /2; f=(b+c) /2;
```

```

tmp=Join[tmp,{a,d,e,d,b,f,e,f,c}];
Return[tmp]]
showsierpinski[pts_List]:=Block[{tmp={},i,pnum=Length[pts]/3},
For[i=0,i<pnum,i=i+1,
AppendTo[tmp,Polygon[{pts[[3 i+1]],pts[[3 i+2]],pts[[3 i+3]]}]]];
Show[Graphics[tmp],AspectRatio Automatic,Background RGBColor[0.8,0.4,0.1]]]
triangle={{-1,0},{1,0},{0,Sqrt[3]}};
p8=showsierpinski[Nest[Sierpinski,triangle,6]]

```

当迭代到一定程度，视觉上已分辨不出小的三角形。下面通过另一种方法生成 Sierpinski 三角形和四边形魔毯。代码如下。

```

Needs ["ProgrammingInMathematicaChaosGame"]
bf1=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 0.5, 0.5, 0, 0];
bf2=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 0.5, 0.5, 0.5, 0];
bf3=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 0.5, 0.5, 0.25, 0.5];
Sierpinski=IFS [{bf1, bf2, bf3}];
ChaosGame [Sierpinski, 10000, Coloring Automatic];
bf1=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 1/3, 1/3, 0, 0];
bf2=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 1/3, 1/3, 0, 1/3];
bf3=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 1/3, 1/3, 0, 2/3];
bf4=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 1/3, 1/3, 1/3, 0];
bf5=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 1/3, 1/3, 1/3, 2/3];
bf6=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 1/3, 1/3, 2/3, 0];
bf7=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 1/3, 1/3, 2/3, 1/3];
bf8=AffineMap [0 Degree, 0 Degree, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3];
Sierpinski=IFS [{bf1, bf2, bf3, bf4, bf5, bf6, bf7, bf8}];
ChaosGame [Sierpinski, 10000, Coloring->Automatic];

```

生成图形如图 13.5 所示。

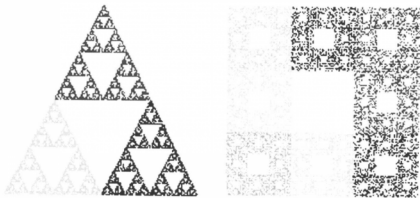


图 13.5 Sierpinski 三角形和四边形魔毯

实验3 Julia 分形画法

[实验目的和要求] 了解复函数迭代的方法和 Julia 分形图案的生成。

[实验原理] 复函数的迭代。

[实验工具] Mathematica 5.0

[实验内容] 复函数的迭代方法以及复函数生成分形的两种方法, 运用 Julia 画法生成分形图形。

(1) 利用复函数的迭代生成分形图案

设
$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, z \in C$$

$$f^{(k)}(z) = f^{(k-1)}(f(z)) = f(f^{(k-1)}(z))$$

为第 k 次迭代。若 $z \in C$, 使得 $f^{(k)}(z) = z$ 对某个 k 成立, 则称 z 为 $f(z)$ 的 k 周期点。

构造函数 $g: C \rightarrow N$, 使 $g(z)$ 为 z 的周期。一个这样的分形图案, 它的边界点是由斥性周期点组成的, 称为 Julia 集, 分形图案的优美之处正是在它的边界上。

(2) 制作分形的两种方法

① Julia 法: 在整个平面上对一个多项式 $f(z)$ 进行迭代, 画出 $g(z)$ 。

② 对 C 上每一个点 z_0 , 定义多项式 $f_{z_0}(z) = f(z, z_0)$, 进行迭代, 求出 z_0 , 周期 $g(g_0)$ 。若某些点无周期, 定义它的周期为 50 (可以更大些)。可以根据 $g(z)$ 的密度图画出生分形图案。一般采用 Julia 画法分形, 引用的函数有

$$f(z) = z^n + C$$

$$f(z) = z(z-1)(z-\rho), |\rho| > 1, \operatorname{im}(\rho) > 0$$

$$f(z) = \lambda z + z^2$$

(3) 分形图案的生成

在 Mathematica 中输入以下代码。

```
julia1[x_, y_, cx_, cy_] :=
Block[{z, ct = 0}, z = x + y * I;
While[(Abs[z] < 2.0) && (ct < 50), ++ct; z = z * (z - 1) * (z - cx - cy * I)];
Return[ct];]

Honey1[cx_, cy_, pu_List, po_List, pl_List] :=
Block[{kok},
kok = DensityPlot[julia3[xx, yy, cx, cy], {xx, pu[[2]], pu[[3]]}, {yy, po[[2]], po[[3]]}, pl,
Mesh -> False, ColorFunction -> Hue]; Return[kok]]
Honey1[0.92922, 0.42662, {x, -0.5, 2}, {y, -1.0, 1.6},
{PlotPoints -> 250, PlotLabel -> "Fan"}]
生成图形如图 13.6 所示。
```

输入下面一段代码。

```
julia2[x_, y_, cx_, cy_] :=
Block[{z, ct = 0}, z = x + y * I;
```

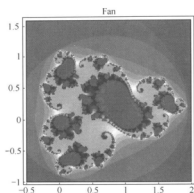


图 13.6 Julia 分形图案 (一)

```
While[(Abs[z]<2.0)&&(ct<50), ++ct; z=z^2+(cx+cy*I)*z]; Return
[ct];
Honey2[cx_,cy_,pu_List,po_List,pl_List]:=
Block[{kok},
kok=DensityPlot[julia4[xx,yy,cx,cy],{xx,pu[[2]],pu[[3]]},{yy,po[[2]],po
[[3]]},pl,
Mesh->False,ColorFunction->Hue];Return[kok]]
Honey2[-1.0,{x,-1.2},{y,-1.0,1},
{PlotPoints->200,PlotLabel->"Eye"}]
Honey2[0.88945,-0.50,{x,-1.5,0.5},{y,-1.0,1.5},
{PlotPoints->200,PlotLabel->"X"}]
生成图形如图 13.7 所示。
```

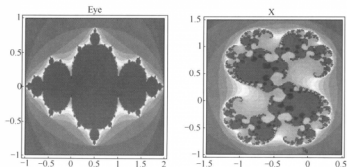


图 13.7 Julia 分形图案 (二)

只要改变迭代公式,就可产生新的 Julia 分形图案,如以下代码所示。

```
julia3[x_,y_,cx_,cy_]:=
Block[{z,ct=0},z=x+y*I;
```

```

While[(Abs[z]<2.0)&&(ct<50), ++ct; z = z * (z - 1)^3 * (z - cx - cy * I);]; Return[ct];]
Honey3[cx_, cy_, pu_List, po_List, pl_List] :=
Block[{kok},
kok = DensityPlot[julia8[xx, yy, cx, cy], {xx, pu[[2]], pu[[3]]}, {yy, po[[2]], po[[3]]}, pl,
Mesh -> False, ColorFunction -> Hue]; Return[kok]]
Honey3[0.92922, 0.652662, {x, -0.3, 2}, {y, -1., 1.3},
{PlotPoints -> 800, PlotLabel -> "Fan"}]
julia4[x_, y_, cx_, cy_] :=
Block[{z, ct = 0}, z = x + y * I;
While[(Abs[z]<2.0)&&(ct<50), ++ct; z = z * (z - 1)^10 * (z - cx - cy * I);];
Return[ct];]
Honey4[cx_, cy_, pu_List, po_List, pl_List] :=
Block[{kok},
kok = DensityPlot[julia8[xx, yy, cx, cy], {xx, pu[[2]], pu[[3]]}, {yy, po[[2]], po[[3]]}, pl,
Mesh -> False, ColorFunction -> Hue]; Return[kok]]
Honey4[0.92922, 0.652662, {x, -0.3, 2}, {y, -1.0, 1.3},
{PlotPoints -> 800, PlotLabel -> "Fan"}]

```

生成图形如图 13.8 所示。

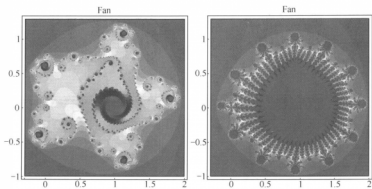


图 13.8 Julia 分形图案 (三)

13.2 分形的自相似特性实验

自相似性是分形的重要特征，它是整体与局部的统一，局部同时包含整体几乎全部的信息。局部组合依然有规律可循，并非杂乱无章。分形图形的自相似性可以从各个角度来观察，有不同感受。正如法国印象派大师雷诺阿所说：“一览无余则不成艺术”。在本节实验中，可以清晰地感觉到分形自相似性特征，并加深对分形理论的认识。

实验 4 在 Ultra Fractal 中的分形自相似

〔实验目的和要求〕 对分形的自相似性加深认识和理解，理解无限自相似性是分形的精髓。

〔实验原理〕 分形的自相似性。

〔实验工具〕 Mathematica 5.0, Ultra Fractal

〔实验内容〕 了解分形艺术美的本质和自相似性的表现，在软件 Ultra Fractal 的实际操作中体会分形的自相似特点。

(1) 分形图形的结构美

分形图案的结构，既不是简单的重复也不是混乱无章，而是混乱中有秩序，统一中有变化。正如贡布里希所说，“审美快感来自对某种介于乏味和杂乱之间的图案的观赏。单调的图案难于吸引人们的注意力，过于复杂的图案则会使知觉系统负荷过重而停止对它进行观赏。”分形的这种复杂就是自相似性的表现，每一个局部都有变化，然而却有内在的次序，有自相似结构也就是局部与整体的对称。它没有传统欧几里德几何形式对称的呆板，平衡中孕育着动势。这种自相似性，蕴涵着无穷的嵌套结构，这种结构的嵌套性带来了画面的极大丰富。

(2) 分形相似性的表现

Van Koch 曲线的自相似性表现，如图 13.9 所示。

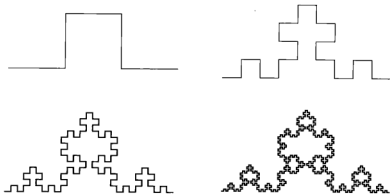


图 13.9 Van Koch 曲线的自相似

Julia sets 由法国数学家 Gaston Julia 在第一次世界大战期间发现，Julia sets 由一个复杂的参数通过简单的计算得到。通过变化可以生成许多图案（图 13.10）。

Julia sets 的自相似性，可通过图形放大（图 13.11）进行观察。

The Mandelbrot set 由分形创始人 B·曼德布罗特发现，这个集虽然计算简单，但其图形非常复杂，如图 13.12 所示是它的自相似表现。

图 13.13 是一位分形艺术家制作的立体分形构成。

(3) 分形自相似性在 Ultra Fractal 中的实现

软件 Ultra Fractal 有大量基本的分形集，只需改变参数就可生成漂亮的分形图。放大软件生成的图形（图 13.14）的操作如下：首先由 Mandelbrot set 产生分形图案，然后



图 13.10 Julia sets 的自相似图案

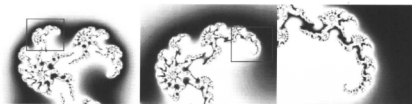


图 13.11 Julia sets 的自相似

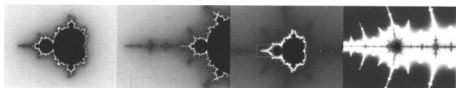


图 13.12 The Mandelbrot set 的自相似



图 13.13 立体分形构成

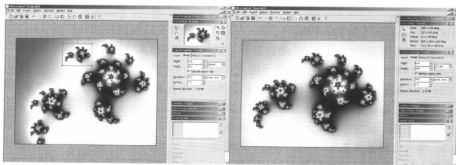


图 13.14 在 Ultra Fractal 中的分形图形

在工具栏中选取框选放大工具，在图面中拉出一矩形，在矩形中双击即可。

实验5 在 Fractint 中的分形自相似

〔实验目的和要求〕 加深对分形自相似性的理解和对分形图形生成过程的了解。

〔实验原理〕 分形自相似特性的应用。

〔实验工具〕 Fractint 20.0

〔实验内容〕 通过改变皮亚诺曲线生成的参数，使分形元迭代的次数变化，从而使生成图形产生不同的复杂度。

运行 Fractint 20.0，进入主选单。按 t 键进入分形类型选单，在其中选择 laystem，进入其菜单下，再选择 peanoli 命令。通过改变参数得到不同的图形（图 13.15）。本实验的参数选择是 order=0, 1, 2, 3, 4, 6。

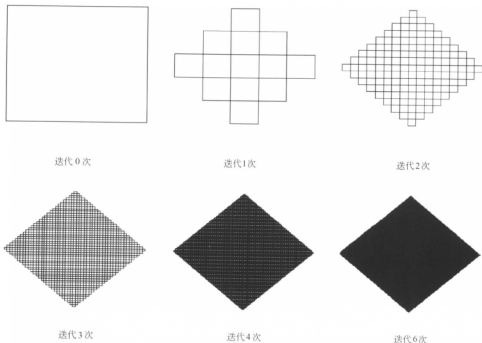


图 13.15 在 Fractint 中的分形自相似

实验6 在 Iterations 中的分形自相似

〔实验目的和要求〕 加深对分形自相似性的理解和对分形图形生成过程的了解。

〔实验原理〕 分形自相似特性的应用。

〔实验工具〕 Iterations

〔实验内容〕 通过对分形图形局部的放大，观察放大的图形与源图形的相似性。

运行 Iterations 软件，选择默认的曼德布罗特集，按图中的位置进行局部放大，结果如图 13.16 所示。

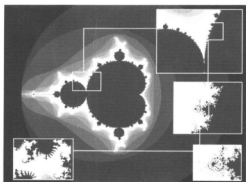


图 13.16 在 Iterations 中的分形自相似

13.3 分形艺术综合实验

通过分形艺术综合实验理解分形特性和分形图形生成的过程。实验内容包括经典规则分形图的生成（如皮亚诺曲线、柯赫曲线和谢尔宾斯基垫片等），模拟自然形态的分形图生成（如树形分形图形）和比较复杂的分形图形。在类型划分上有绘画类型、构成类型和线面组合类型等，其中许多实验与装饰图案有紧密联系。

实验 7 分形艺术实验

〔实验目的和要求〕 加深对分形自相似性的理解，并模拟自然形态。

〔实验原理〕 分形自相似特性的应用。

〔实验工具〕 Fractint 20.0, Iterations

〔实验内容〕 通过改变图形生成的参数，使分形元迭代的次数变化，从而使生成图形的复杂程度不同。

(1) 树形

运行 Fractint 20.0，进入主选单。按 t 键进入分形类型选单，在其中选择 laystem，进入其菜单下，再选择 Tree1 命令。通过改变参数得到不同的图形（图 13.17）。本实验的参数选择是 $\text{order}=2, 3, 5, 9$ 。

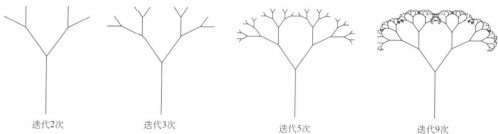


图 13.17 树形

(2) 矮树丛

运行 Fractint 20.0，进入主选单。按 t 键进入分形类型选单，在其中选择 laystem，

进入其菜单下,再选择 plant03 命令。通过改变参数得到不同的图形(图 13.18)。本实验的参数选择是 $order=0, 1, 3, 4, 5, 7$ 。

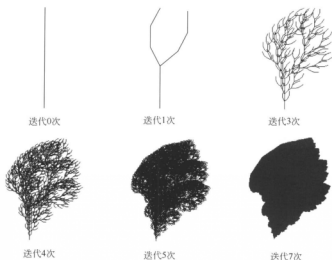


图 13.18 矮树丛

(3) 龙形

运行 Fractint 20.0, 进入主选单。按 t 键进入分形类型选单, 在其中选择 laystem, 进入其菜单下, 再选择 Dragon 命令。通过改变参数得到不同的图形(图 13.19)。本实验的参数选择是 $order=1, 3, 6, 9, 12, 16$ 。

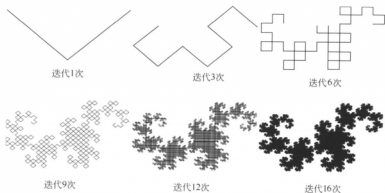


图 13.19 龙形

(4) 谢尔宾斯基垫片

① 三角形 运行 Fractint 20.0, 进入主选单。按 t 键进入分形类型选单, 在其中选择 laystem, 进入其菜单下, 再选择 Sierpinski2 命令。通过改变参数得到不同的图形(图 13.20)。本实验的参数选择是 $order=0, 1, 2, 5, 8, 10$ 。

② 方形 运行 Fractint 20.0, 进入主选单。按 t 键进入分形类型选单, 在其中选择 laystem, 进入其菜单下, 再选择 SierpinskiSquare 命令。通过改变参数得到不同的图形

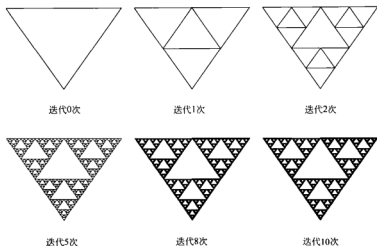


图 13.20 谢尔宾斯基垫片的三角形

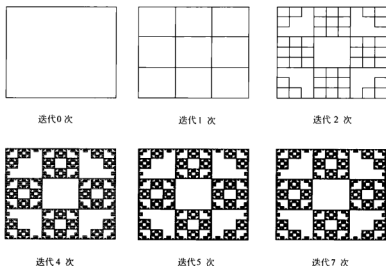


图 13.21 谢尔宾斯基垫片方形

(图 13.21)。本实验的参数选择是 $\text{order}=0, 1, 2, 4, 5, 7$ 。

(5) 麦芽

运行 Fractint 20.0, 进入主选单。按 t 键进入分形类型选单, 在其中选择 laystem , 进入其菜单下, 再选择 plant07 命令。通过改变参数得到不同的图形 (图 13.22)。本实验的参数选择是 $\text{order}=1, 2, 5, 7$ 。

(6) 柯赫 (Koch) 曲线

运行 Fractint 20.0, 进入主选单。按 t 键进入分形类型选单, 在其中选择 laystem , 进入其菜单下, 再选择 Koch1 命令。通过改变参数得到不同的图形 (图 13.23)。本实验的参数选择是 $\text{order}=0, 2, 4, 8$ 。

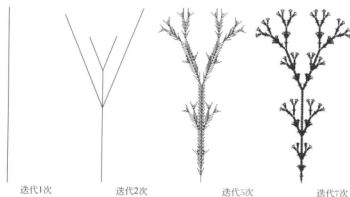


图 13.22 麦芽

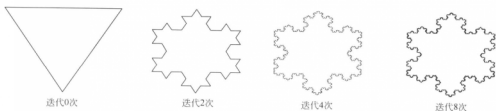


图 13.23 柯赫 (Koch) 曲线

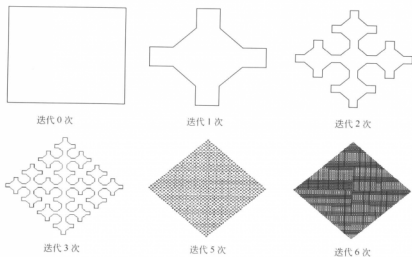


图 13.24 皮亚诺 (peano) 曲线 (一)

(7) 皮亚诺 (peano) 曲线

运行 Fractint 20.0, 进入主选单。按 t 键进入分形类型选单, 在其中选择 laystem, 进入其菜单下, 再选择 peano2 命令。通过改变参数得到不同的图形 (图 13.24)。本实验的参数选择是 order=0, 1, 2, 3, 5, 6。

运行 Fractint 20.0, 进入主选单。按 t 键进入分形类型选单, 在其中选择 laystem, 进入其菜单下, 再选择 peano3 命令。通过改变参数得到不同的图形 (图 13.25)。本实验的参数选择是 order=1, 2, 3, 4, 5, 6。

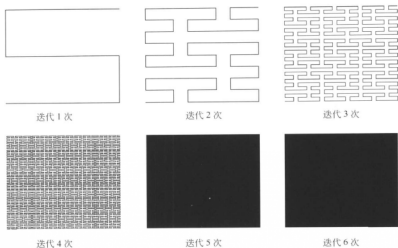


图 13.25 皮亚诺 (peano) 曲线 (二)

(8) 牛顿之花

运行 Iterations 软件, 在 Menu 菜单下选择 Raphson 第 63 个公式

$$F(c) = c - ((c^5) - 1) / (4 * ((c^4)));$$

然后在 strands 菜单中选择第 64 个公式 Strands 4 [Bay Fact 1, Bay Fact 2] Rings, 在 Fractal Parameters 中修改参数, 颜色可以选择。结果如图 13.26 所示。

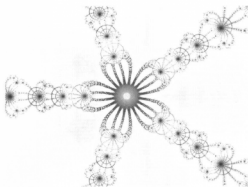


图 13.26 牛顿之花 (李刚)

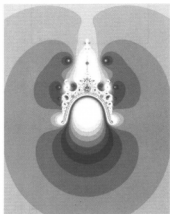


图 13.27 狮子与皇冠 (李刚)

(9) 狮子与皇冠

运行 Iterations 软件, 在 Menu 菜单下选择 Derbyshire 第 58 个公式

$$z = z - (z * z * z + 1) / (3 * z * z) + c$$

然后在 Filter-2 中选择第 48 个公式 $\text{if} (\text{fabs} (\text{dxx}) < z.\text{squares} () \parallel \text{fabs} (\text{dzy}) < z.\text{squares} ())$, 在 Options 菜单中选择 Inside Gradients 中的第 13 个公式 $=da * da * b1$, 在 Fractal Parameters 中修改参数, 颜色可以选择。结果如图 13.27 所示。

(10) 肌理

运行 Iterations 软件, 在 Menu 菜单下选择 Sharon Webb 第 141 个公式

$$z1=2; z=z*z*z*z*z+z2/z+c; z2=z1$$

然后在 Strands 中选择第 57 个公式 Strands 1 [Bay Fact 1, Bay Fact 2] Chkr Brd, 在 Options 菜单下选择第 22 个公式 Quad、第 32 个公式 $z=z \cdot \text{csin} ()$ 、第 34 个公式 $z=\text{tangent} (z)$ 、第 38 个公式 $z=\text{arctan} (z)$ 。在 Options 菜单中选择 Inside Gradients 中的第 18 个公式 $=da * da * da * 0.3$ 。在 Fractal Parameters 中修改参数, 颜色可以自己选择。结果如图 13.28 所示。

(11) 宇宙旋转

运行 Iterations 软件, 在 Menu 菜单下选择 Polynomials 4 第 161 个公式

$$z=z*z+c; z=z*(.5+c)+c$$

然后在 Menu 菜单下的 Combo-Fract 中选择第 10 个公式 $z=\text{sqrt} (z)$, 在 Menu 菜单下的 Biomorph 中选择第 2 个公式 Biomorph, $(2 * x * y)$; 在 Menu 菜单下选择 $C=\log (Mag^{\wedge} Pwr)$, 在 Strands 中选择第 57 个公式 Strands 1 [Bay Fact 1, Bay Fact 2] Chkr Brd, 在 Options 菜单下选择第 22 个公式 Quad、第 32 个公式 $z=z \cdot \text{csin} ()$ 、第 34 个公式 $z=\text{tangent} (z)$, 在 Options 菜单中选择 Inside Gradients 中的第 15 个公式 $=10 * \sin (da * dm * b1) * b2$, 在 Options 菜单中选择 Gradients Options 中的第 3 个公式 $xsq=3 * \sin (xsq) * 10$; $ysq=2.4 * \log_{10} (ysq) * 10$, 在 Fractal Parameters 中修改参数, 颜色可以选择。结果如图 13.29 所示。



图 13.28 肌理 (李刚)

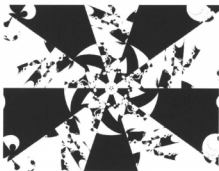


图 13.29 宇宙旋转 (李刚)

实验 8 分形色彩的艺术化

【实验目的和要求】 了解分形图形在平面软件中的艺术处理。

【实验原理】 分形和图形处理。

【实验工具】 Ultra Fractal、Photoshop 7.0

【实验内容】 学会在软件 Fractal Explorer 中生成图形, 掌握在平面设计软件 Photoshop 7.0 中滤镜效果的应用。

(1) 分形图形的生成

本实验,重点是让读者掌握在 Photoshop 7.0 软件中处理分形的色彩艺术化。分形色彩丰富绚丽,效果极富有艺术感染力。通过处理形成各种艺术风格。图 13.30 是本实验用到的图例,此图是龙形纹的变形,制作的过程在这里就不作论述。

(2) Photoshop 7.0 中滤镜的应用

在 Photoshop 7.0 中,打开分形图 13.30。然后新建文件分形色彩艺术,把图形拖到新文件上面,然后后面的操作都是对分形色彩艺术而言,原文件不保存。第一步就是对图形所在的图层进行滤镜操作,选择菜单滤镜→画笔描边→喷色描边,出现对话框如图 13.31 所示。下面简要介绍一下喷色描边对话框,最上面的加减号是用来修改显示的比例,下面两项是线条长度和喷色半径。描边方向可以点右边黑点选择,方向包括右对角线、水平、左对角线、垂直。把线条长度值调为 2,喷色半径调为 8,描边方向为水平,然后点击确认即可。效果如图 13.32 所示。但整体上缺乏一种在纸上绘图的肌理感,下面通过底纹滤镜的处理,来达到一种绘画的效果。

下面来看纹理滤镜的功能。选择菜单滤镜→纹理→纹理化,出现对话框如图 13.33 所

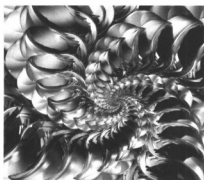


图 13.30 螺旋花瓣

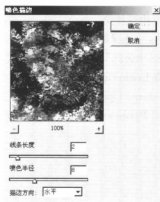


图 13.31 喷色描边对话框

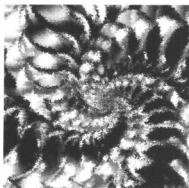


图 13.32 喷色描边效果

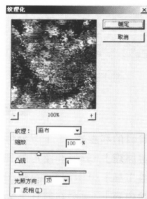


图 13.33 纹理滤镜

示。主要功能是进行图形的纹理化,纹理选项包括砖形、粗麻布、画布、砂岩、载入纹理五个选项,载入纹理可以把定义好的其他纹理加载进来。下面是缩放和凸现、光照选项,通过调节可接近在画布上的手绘效果。

(3) 实验小结

随着软件功能的不断强大,虽然不能代替手绘,但是利用软件也能够得到一些奇妙的效果。本实验试图把分形色彩进行处理,形成在画布上手绘的分形图形,形成独特的艺术风格。最后的参考图形(水粉效果)如图 13.34 所示。

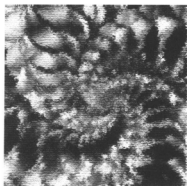


图 13.34 水粉效果(李响)

实验 9 分形图形艺术复合实验

【实验目的和要求】 通过对分形图形进行的各种设计应用,加深对分形图形在设计中的应用范围的理解,即分形图形的应用不局限于数学范围内。

【实验原理】 应用直接由数学公式生成的分形图形结合其他软件创作分形艺术作品。

【实验工具】 Fractint 20.0, Iterations, Adobe Photoshop, CorelDRAW、Brayce 3D, Adobe ImageReady

【实验内容】

(1) GIF 动画(见光盘)

将两张分形图形结合 Adobe Photoshop 和 Adobe ImageReady,制作出 GIF 动画,表现了一种对爱情永恒的渴望(图 13.35)。

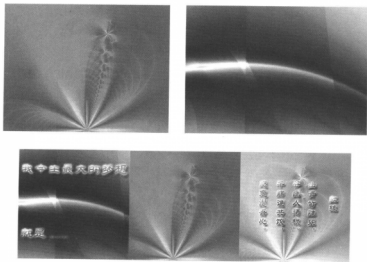


图 13.35 GIF 动画静帧及其分形原始图(李刚)

(2) 分形虚拟城市

将分形图导入 Bryce 3D 中, 将其随机转变为立体图形, 在其上设计 Bryce 3D 的自带形体, 得出如图 13.36 所示的图形。



图 13.36 虚拟城市 (李刚)

(3) 分形图形在家装设计中的应用

将分形图 13.37 在 Adobe Photoshop 中应用到家装壁画中, 也是很和谐的 (图 13.38)。

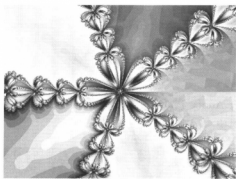


图 13.37 分形图



图 13.38 家装中的壁画 (李刚)

(4) 在封面设计中的应用

在封面设计中根据书籍特定的内容选择相应的分形图形进行创作。分形在各个学科领域都有重要的应用,这样不仅可以表现该学科的新的发展方向,而且可以提高读者的兴趣(图 13.39)。

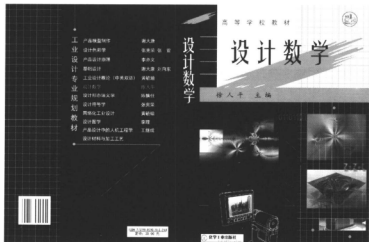


图 13.39 封面设计示例(李刚)

(5) 利用分形设计原理创作的“理性公园 (REASON PARK)”

理性公园(图 13.40)的创作意图是用平面图形(如不同粗细的直线)表现出立体的形态。参观者可以从左下角的两个入口进入,在由远近不同的立柱组成的公园中参观,出口在右下角。

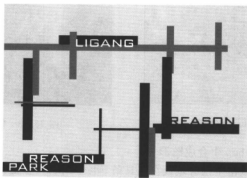


图 13.40 理性公园(李刚)

实验 10 图形合成技巧

〔实验目的和要求〕 掌握分形图形的制作以及在平面软件中的合成方法。

〔实验原理〕 分形和图形合成。

〔实验工具〕 Fractal Explorer、Photoshop 7.0

〔实验内容〕 在软件 Fractal Explorer 里生成原始图形,再在平面设计软件Photoshop

7.0 中进行图形处理和效果的添加与合成。

(1) 在软件 Fractal Explorer 中生成图形

启动软件 Fractal Explorer, 在工具条里选择分形类型, 如图 13.41 所示。出现选择框 Select fractal, 在里面选取 Sharon Webb 14 类型 (图 13.42)。通过参数修改, 找到想要的图形效果。在 Fractal Explorer 里生成的图形大小也可通过命令进行修改, 获得较高精度的图形输出, 方便打印和后期处理。在工具条中选择 Options→Fractal size→800×600, 设置分辨率。可根据硬件情况进行设置, 设置太高会占用较多内存。

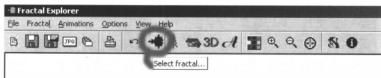


图 13.41 选择分形类型

然后, 对图形进行颜色设置。设置比较简单, 在工具条里选择色彩选择的图表, 打开后进行调节, 直到满意为止。

最后得到的效果如图 13.43 所示。可以发现图形如不断向外生长的仙人掌。下面再通过 Photoshop 合成生长在沙漠里的仙人掌, 并加上镜头的晕光效果。

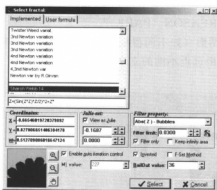


图 13.42 选取 Sharon Webb 14

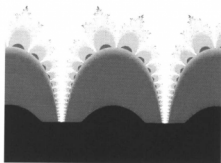


图 13.43 仙人掌分形图

(2) 在软件 Photoshop 中合成图形

打开 Photoshop, 双击空白区域或在工具条 File→Open (快捷键 Ctrl + O) 中把上述在 Fractal Explorer 中生成的图形打开。

然后给图形加沙漠背景, 选择一张带沙漠的图片。找不到也没有关系, 在 Photoshop 中自带一张图例, 通过路径 Photoshop→Samples→山丘选择并打开, 然后把仙人掌图片的空白处删除。先点击背景图层解锁。然后用魔棒选取白色区域用键盘上的 Delete 键进行删除 (图 13.44)。

接下来把山丘图的沙漠背景抠下来, 放到仙人掌图形的下层, 把天空部分同样抠到下层, 方法是用矩形选框工具选一定区域后用移动工具拖拉到仙人掌的图形上, 它会自动形

成图层。由此共产生三个图层，排列的顺序是沙漠图形在最下层，接着是蓝色的天空和仙人掌。这时，天空和沙漠的交界处太清晰，无景深效果。故在工具箱中选择模糊工具在边缘进行效果调试，直到效果满意为止。参考图形如图 13.45 所示。

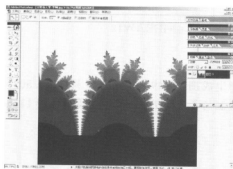


图 13.44 删除背景



图 13.45 添加新背景

最后一步是添加光晕效果。Photoshop 自带的滤镜中有添加光晕的效果，但可调节空间不大。在滤镜插件 KPT effects 6.0 中有 KPT Lensflare，里面自带很多种镜头光晕的效果，同时每个光晕的参数都可以改变。在这个实验里就用 Photoshop 自带的滤镜处理，在工具条滤镜→渲染→镜头光晕中打开面板如图 13.46 所示。亮度参数可以调节光晕的整体亮度；光源中心可以拖动十字图标进行改变；最后一项是镜头类型，包括三种：50~300mm 变焦、35mm 聚焦、105mm 聚焦。在修改参数的时候观察图形的改变效果以积累经验。最后，调到比较真实的效果，然后另存图形为 *.jpg 格式即可，图形合成基本结束。可再对一些细节进行修改，直到满意为止。最终的效果如图 13.47 所示，供参考。



图 13.46 添加光晕效果

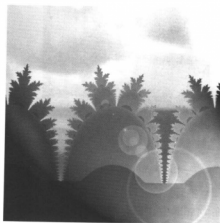


图 13.47 合成图（李响）

图形的合成技巧，是利用基本的图形根据构思进行合成，要求在合成之前就有比较明确的思路。同时要求熟练掌握几个软件的综合应用和通过合理的命令达到想要的效果。

实验 11 图形的合成与制作

〔实验目的和要求〕 掌握分形图形的制作以及在平面软件中的合成与制作方法。

〔实验原理〕 各种图形制作软件的综合运用。

〔实验工具〕 Fractal Explorer、Photoshop 7.0、CorelDRAW12

〔实验内容〕

(1) 彩霞曲

在 Maple 中生成图 13.48, 在分形软件中生成图 13.49, 并结合素材图 13.50, 在 CorelDRAW 与 Photoshop 中分别生成图框的绘制与各个图层的处理。可得最终图 13.51。

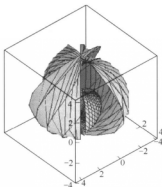


图 13.48 素材一 (1)

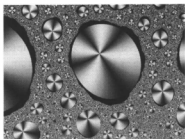


图 13.49 素材一 (2)

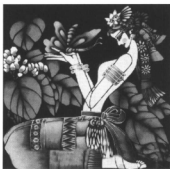


图 13.50 素材一 (3)



图 13.51 彩霞曲 (荷双晓)

(2) 挑灯看剑

在 Maple 中作图, 得图 13.52~图 13.54, 在分形软件中生成图 13.55 和图 13.56。在 CorelDRAW 与 Photoshop 中分别生成图框的绘制与各个图层的处理。可得最终图 13.57。

(3) 分形花布图案设计

在分形软件 Ultra Fractal 中生成图 13.58 所示的分形花布图案单元, 然后在 Photoshop 中进行连续处理得到最终的效果图 13.59。

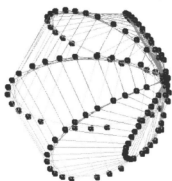


图 13.52 素材二 (1)

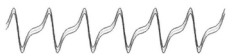


图 13.53 素材二 (2)



图 13.54 素材二 (3)



图 13.55 素材二 (4)

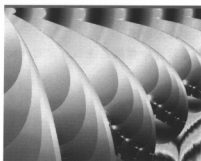


图 13.56 素材二 (5)

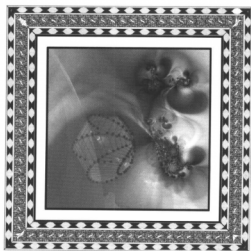


图 13.57 挑灯看剑 (荷双晓)

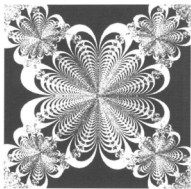


图 13.58 分形花布图案单元

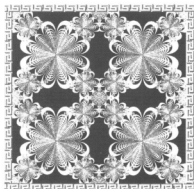


图 13.59 分形花布 (李响)

(4) 线之舞

在分形软件 Ultra Fractal 中生成线的图形, 富有韵律和动感, 在 Photoshop 中处理后得到效果图 13.60。

(5) 生命的曲线

在分形软件中螺旋的龙纹, 经过 Photoshop 的特殊处理后更加富有生命力, 如图 13.61 所示。



图 13.60 线之舞 (李响)

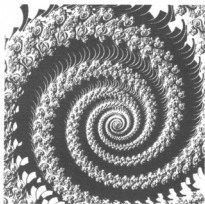


图 13.61 生命的曲线 (李响)

(6) 无题分形创作

下面是用几个分形软件生成图形, 在 Photoshop 中添加火焰而成, 整体像雕塑, 使人联想到很多具象的东西, 效果如图 13.62 所示。

(7) 绿色生命

通过分形软件来表现一种绿色生命的蓬勃生机, 在 Fractal Explorer、Ultra Fractal 中完成图 13.63。

(8) 公益海报设计——分形创作

本海报利用分形造型的特点, 很好地夸张表现了沙尘暴来临的景象, 视觉冲击力强,



图 13.62 无题——分形创作 (李响)

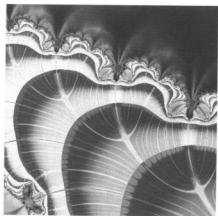


图 13.63 绿色生命 (李响)

给人以震撼。让人类知道破坏环境的危害，达到宣传的目的。制作过程，在分形软件 Ultra Fractal 中生成基本的分形图形，然后在 Photoshop 中处理，得到图 13.64 的效果。

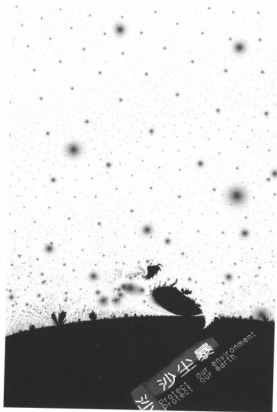


图 13.64 公益海报设计 (李响)

13.4 小结

① 分形图形生成方法实验包括 Koch 曲线构造方法、Sierpinski 三角构造方法、Julia 分形画法实验。

② 分形的自相似特性实验包括了 Ultra Fractal、Fractint 和 Iterations 三个软件中的分形自相似实验。

③ 分形艺术综合实验包括了树形、矮树丛、龙形、谢尔宾斯基垫片、麦芽、柯赫 (Koch) 曲线、皮亚诺 (Peano) 曲线、牛顿之花、狮子与皇冠、肌理以及宇宙旋转等复杂分形图的生成实验。

④ 分形合成实验是在掌握分形图案制作的基础上, 配合应用 CorelDraw、Photoshop 等辅助设计软件, 结合自己的设计知识进行合成创新, 可以创作出许多神奇美丽、变幻莫测、蕴涵科学之美的优秀作品。

⑤ 分形艺术把自然形态看作具有无限嵌套层次的精确结构, 并在不同尺度下保持相似属性, 于是成为在简单迭代过程中就可描述复杂自然形态的有效方法。分形在许多领域, 特别是在设计艺术领域有着广泛的应用。

参 考 文 献

- 1 人民教育出版社中学数学室编著. 数学. 第一册(上). 第二版. 北京: 人民教育出版社, 2000
- 2 人民教育出版社中学数学室编著. 数学. 第二册(下B). 第二版. 北京: 人民教育出版社, 2001
- 3 人民教育出版社中学数学室编著. 几何. 第二册. 第二版. 北京: 人民教育出版社, 1993
- 4 同济大学数学教研室主编. 高等数学. 下册. 北京: 人民教育出版社, 1978
- 5 上海交通大学数学教研室编. 线性代数. 北京: 人民教育出版社, 1978
- 6 北京矿业学院高等数学教研组编著. 数学手册. 北京: 煤炭工业出版社, 1976
- 7 袁涛编著. 设计构成. 北京: 机械工业出版社, 2004
- 8 袁涛编著. 形态构成. 昆明: 云南美术出版社, 2003
- 9 [美]金伯利·伊拉姆著. 设计几何学——关于比例与构成的研究. 李乐山译. 北京: 中国水利水电出版社, 知识产权出版社, 2003
- 10 赵殿译编著. 立体构成. 沈阳: 辽宁美术出版社, 1991
- 11 王无邪著. 立体构成原理. 李田心译. 西安: 陕西人民美术出版社, 1989
- 12 彭善秀著. 构图中的数与分割. 昆明: 云南人民出版社, 2002
- 13 童秉枢, 李学志, 吴志军等. 机械CAD技术基础. 北京: 清华大学出版社, 1996
- 14 孙博文. 电脑分形艺术. 哈尔滨: 黑龙江美术出版社, 1999
- 15 陈顺, 陈凌. 分形几何学. 北京: 地震出版社, 1998
- 16 曼德布罗特. 分形对象形、机遇和维数. 文志英, 苏虹译. 北京: 世界图书出版社, 1999
- 17 辛厚文主编. 分形理论及应用. 合肥: 中国科学技术出版社, 1993
- 18 林鸿溢, 李映雪. 分形论——奇异性探索. 北京: 北京理工大学出版社, 1992
- 19 刘华杰. 分形艺术. 长沙: 中国科学技术出版社, 1998
- 20 李水根. 分形. 北京: 高等教育出版社, 2004
- 21 王小铭. 分形图案的构图艺术及计算机实现. 计算机辅助设计与图形学报, 2001, 13(1): 83
- 22 许秦蓉, 和克智, 王迪功. 分形图形在包装装潢中的研究. 中国包装, 2002, 22(5): 61
- 23 汪富权, 李后强. 分形几何与动力系统. 哈尔滨: 黑龙江教育出版社, 1993
- 24 Donald Hearn 等. 计算机图形学. 第二版. 蔡士杰等译. 北京: 电子工业出版社, 2003
- 25 鲍虎军, 彭群生, 金小刚. 计算机真实感图形的算法基础. 北京: 科学出版社, 2002
- 26 A. D. Andrew, G. L. Cain 等. 用 Mathematica 做微积分实验. 俞正光, 章纪民译. 北京: 清华大学出版社, 2003
- 27 满懿. 平面构成. 沈阳: 辽宁美术出版社, 1998
- 28 毛溪. 平面构成. 上海: 上海人民美术出版社, 2003
- 29 王念. 立体构成. 北京: 化学工业出版社, 2004
- 30 胡分明. 立体构成. 上海: 上海人民美术出版社, 2003
- 31 李强. Maple8 基础应用教程. 北京: 中国水利水电出版社, 2004
- 32 荆雷. 设计艺术原理. 济南: 山东教育出版社, 2002
- 33 邵勇. Mathematica 数学软件入门. 北京: 高等教育出版社, 2001
- 34 吴振奎, 刘舒强. 数学中的美. 天津: 天津教育出版社, 1997
- 35 徐峰, 陶绍灵, 陈子晔. 分形美及其应用. 气象教育与科技, 2001, 23(3): 25
- 36 刘华杰. 电脑分形艺术. 长沙: 湖南电子音像出版社, 1997
- 37 石玉纯. 服饰图案设计. 北京: 中国纺织出版社, 1995
- 38 赵国志. 色彩构成. 沈阳: 辽宁美术出版社, 2002
- 39 陈瑛, 孙霖. 色彩构成. 武昌: 武汉大学出版社, 2003

- 40 [日]朝仓直巳著. 艺术·设计的色彩构成. 赵隔安译. 北京: 中国计划出版社, 2000
- 41 郑健. 色彩构成. 福州: 福建美术出版社, 2003
- 42 李鹏程, 王玮著. 色彩构成. 上海: 上海人民美术出版社, 2003
- 43 [法] 丹纳著. 艺术哲学. 傅雷译. 北京: 人民文学出版社, 1996
- 44 陈军. 审美新方法. 南昌: 江西高校出版社, 1996
- 45 周正. 绘画构成原理. 西安: 西北大学出版社, 1986
- 46 解思泽, 徐本顺. 数学思想方法. 济南: 山东教育出版社, 1995
- 47 吴开朗. 数学美学. 北京: 北京教育出版社, 1993
- 48 张顺燕. 数学的思想、方法和应用. 北京: 北京大学出版社, 2003
- 49 [美] 鲁道夫·阿恩海姆著. 艺术与视知觉——视觉艺术心理学. 滕守尧, 朱疆源译. 北京: 中国社会科学出版社, 1984
- 50 [美] 鲁道夫·阿恩海姆著. 视觉思维——审美直觉心理学. 滕守尧译. 北京: 光明日报出版社, 1987